
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01215256 7

G H Hardy

B. G. TEUBNERS SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BAND XXXIII

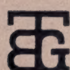
KONSTRUKTIONEN UND APPROXIMATIONEN

IN SYSTEMATISCHER DARSTELLUNG
EINE ERGÄNZUNG DER NIEDEREN
EINE VORSTUFE ZUR HÖHEREN GEOMETRIE

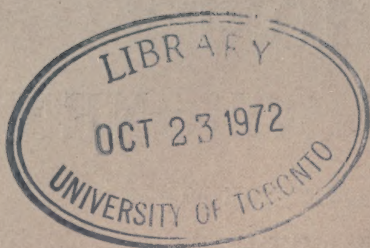
VON

THEODOR VAHLEN

MIT 127 FIGUREN IM TEXT



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1911


LIBRARY
OCT 23 1972
UNIVERSITY OF TORONTO

DIR, LIEBER VATER,
ZUM ACHTZIGSTEN GEBURTSTAGE

WIDME ICH DIESES BUCH; ES WURZELT IN DEM FRUCHTBAREN BODEN DES KLASSISCHEN ALTERTUMS, DEM DAS WERK DEINES LEBENS GALT.

VORWORT.

Zwischen dem mathematischen Unterricht an den höheren und dem an den Hochschulen besteht eine Lücke. Die Schule führt nicht bis an die Schwelle der höheren Mathematik heran, die Universität setzt nicht dort ein, wo die Schule aufhört. Es bleibt dem Studierenden überlassen, diese Lücke durch privates Studium auszufüllen. Das ist kein Schade, aber man muß ihm die Mittel dazu an die Hand geben. Diesem Zwecke kommen in neuerer Zeit mehrere Bücher entgegen, so vor allem die von *Klein*[1]) und *Enriques*[2]). Diesen reiht sich das vorliegende an. Es geht aus einer im Sommer 1902 in Königsberg gehaltenen Vorlesung hervor. Die Einführung solcher Vorlesungen, zwar von vielen Seiten befürwortet, ist nicht zweckmäßig; der unbedingt nötigen Vorlesungen sind so schon mehr als genug. Auch ist gerade dieses Gebiet, eine Art *mittlerer Mathematik*, zur Einführung und zum Privatstudium für jüngere Studierende besonders geeignet. Eine solche Abtrennung der einfacheren Teile der höheren Mathematik hatte ja schon *Euler* in seiner „Introductio in analysin infinitorum" vorgenommen, deren Inhalt wir heute als *„niedere Analysis"* bezeichnen. Seitdem sind andere und wichtige namentlich geometrische Gebiete hinzugekommen. Das vergangene Jahrhundert, im Verhältnis zum vorhergehenden das kritische genannt, ist in Beziehung zum Altertum das vollendende zu nennen. Die uralten Probleme der Quadratur, Trisektion und Duplikation haben in ihm ihre Erledigung gefunden. Die Mittel, die dazu aufgeboten werden mußten, haben Licht nach vielen Seiten verbreitet, neue Fragestellungen schlossen sich an, eine ganze Theorie der Konstruktionen entstand daraus.

Von den mancherlei Ergebnissen der erwähnten Vorlesung von 1902 mag wohl inzwischen das eine oder andere anderweitig gefunden worden sein. Mir kommt es in diesem elementaren Buche nicht auf irgendwelche Einzelergebnisse an, sondern auf eine Systematik des ganzen Gebietes, wie sie bisher noch nirgends versucht

---

1) Ausgewählte Fragen der Elementargeometrie. Leipzig 1895. Elementarmathematik von einem höheren Standpunkte aus. Leipzig 1909.

2) Questioni riguardanti la geometria elementare, Bologna 1900; deutsch von H. Fleischer II (Leipzig 1907).

wurde. Aber gerade eine solche ist für eine Disziplin, die sich an die elementaren angliedern soll, ein unbedingtes Erfordernis und zugleich ein Kriterium dafür, daß das Gebiet eine gewisse Reife und Abrundung erlangt hat.

Die elementare Bestimmung des Buches verlangte elementare Methoden. Vielfach mußten solche erst erfunden werden, so z. B. für die schöne *Laguerre*sche Approximation goniometrischer durch algebraische Funktionen, die schon *Hermite* einfacher zu begründen suchte, ferner für das Additionstheorem in der exzentrischen Kreisteilung. Das ist das einfache Bild, unter dem ich die Teilung der elliptischen Funktionen der Elementarmathematik einverleibe. Auch in der niederen Analysis mußten oft neue Wege eingeschlagen werden. Für die Transzendenz von e und π hatte ich schon im Jahre 1900 einen elementaren Beweis beigebracht. In diesem Buche wird nunmehr gezeigt, daß die einfachen Gedanken, auf denen er beruht, im Grunde schon in den Beweisen von *Lambert* und *Hermite* für die Irrationalität von π und π^2 enthalten sind.

Von Interesse ist vielleicht noch die elementare Einführung der Kreispunkte, der Winkel und Strecken als Logarithmen von Doppelverhältnissen, die Quadratur der Hyperbelsektoren ohne verkappte Integration, die eigentümliche mechanische Quadratur und Rektifikation beliebiger Kurven, wie sie sich aus gewissen Formeln von *Lambert* gewinnen läßt.

Die elementaren Methoden werden heute vielfach vernachlässigt, ihre Tragweite unterschätzt, weil man sie zu beherrschen verlernt hat. Denn daran liegt es doch, daß die auf elementarem Wege erkennbare Transzendenz von e und π zuerst nach Überwindung großer Schwierigkeiten auf einem außerordentlichen Umwege gefunden wurde[1]); oder daß so manche zu den Zeiten eines *Fermat* bewiesene Sätze, z. B. die über die *Mersenne*schen Primzahlen heute für uns unbeweisbar sind. Die elementaren Methoden, von den älteren Mathematikern mit Virtuosität gehandhabt, sind uns nicht ebenso geläufig. In der Überschätzung des Neuen haben wir das bewährte Alte vernachlässigt. Und wir gehen sogar so weit auch auf der Schule, zugunsten einiger sehr bescheidener Teile neuerer Methoden, die alten noch weniger behandeln zu wollen; statt sie vielmehr tiefer, gründlicher, umfassender zu erörtern und ihre weit reichende Anwendbarkeit voll auszunutzen.

---

1) Hermite äußert sich darüber noch ganz resigniert an Borchardt (Crelles J. 76 [1873], p. 342): Je ne m'hasarderai point à la recherche d'une démonstration de la transcendence du nombre π. Que d'autres tentent l'entreprise, nul ne sera plus heureux que moi de leur succès, mais croyez m'en, mon cher ami, il ne laissera pas que de leur coûter quelques efforts.

Für die Wertschätzung des Elementaren berufe ich mich auf *Gauss*, der an der leider in Vergessenheit geratenen *Erchinger*schen Konstruktion des regulären Siebzehnecks „die musterhafte mühsame Sorgfalt alles nicht rein Elementarische zu vermeiden“ mit hohen Worten der Anerkennung hervorhebt.

Während die Theorie der Konstruktionen vielfach, wenn auch hier zum ersten Male in systematischer, gewissermaßen erschöpfender Weise behandelt wird, ist das für die Theorie der Approximationen nicht der Fall. Auf die Notwendigkeit, diese Gebiete mehr zu pflegen, hat vor allem *Klein*[1]) nachdrücklich hingewiesen, und manche Arbeit ist aus dieser Anregung hervorgegangen. Soll hier nicht wieder die Verbindung mit den Elementen abreißen, so muß auch den *elementaren* Näherungsmethoden zu ihrem Rechte verholfen werden. In der Geometrie, wie sie in Euklids Elementen sich durch zwei Jahrtausende fast unverändert erhalten hat, war für diese Methoden kein Platz. Daher mag es kommen, daß dieselben auch sonst verhältnismäßig wenig berücksichtigt wurden. Demgegenüber habe ich Wert darauf gelegt, einige ältere Näherungsmethoden, wie sie sich bei den Ägyptern, Griechen und Indern und auch bei uns in älterer Zeit, so namentlich bei Dürer, Vieta, Huyghens u. a. fanden, wieder in Erinnerung zu bringen.

Dabei hat auch eine der *Laguerre*schen ähnliche, aber einfachere Approximation der goniometrischen Funktionen von *Bhaskara*, deren Entstehung für rätselhaft galt, ihre Aufklärung gefunden. Ebenso eine bisher nicht interpretierte *Heroni*sche Kubikwurzelapproximation. Es handelt sich hier um eine gebrochene Interpolation, zu der sich ein Analogon bei *Gauss* findet. Für die Fehlertheorie der geometrischen Konstruktionen wurde außer der *Gauss*schen Methode der kleinsten Fehlerquadratsummen auch die *Poncelet-Tchebycheff*sche des kleinsten Maximalfehlers herangezogen.

Die niedere Analysis tritt in diesem Buche nur als Mittel zum Zweck auf. Da sie, im Gegensatz zu den anderen Teilen des Buches, anderweitig gründliche Behandlung erfahren hat, kommt sie hier nur abrißweise zur Darstellung. Ich habe geglaubt, mich von den Worten *Hermites*[2]) leiten lassen zu dürfen:

L'admiration, a-t-on dit, est le principe du savoir, . . .; je m'autoriserai de cette pensée pour exprimer le désir qu'on fasse la part la plus large, pour les étudiants aux choses simples et belles, qu'à l'extrême rigueur aujourd'hui si en honneur, mais bien peu attrayante, souvent même fatigante et sans grand profit pour le commençant qui n'en peut comprendre l'intérêt.

---

1) Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. Leipzig 1902. 2) Oeuvres I, p. XXXVII.

Demgemäß bevorzugt meine Darstellung das Formale und verweist Verschärfungen als sekundärer Natur gelegentlich in die Anmerkungen.

Bei einem Buche, wie dem vorliegenden, versteht es sich von selbst, daß auch das Historische und Literarische umfassende und gründliche Berücksichtigung findet. Das ist in solchem Umfang geschehen, daß ich hoffen kann, nichts Wichtiges unerwähnt gelassen zu haben.

Es bleibt mir noch übrig Herrn Dr. *Theodor Beyer* in Stralsund, meinem früheren Schüler, für seine Hilfe beim Lesen der Korrekturen und bei Herstellung des Manuskriptes nach dem Vorlesungskonzept meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Der Verlagsbuchhandlung *B. G. Teubner* bin ich für ihr bereitwilliges Entgegenkommen und für die Drucklegung durch mancherlei Schwierigkeiten hindurch zu großem Danke verpflichtet.

Eldena i. Pomm., Dezember 1910.

VAHLEN.

INHALT.

Erster Teil.

Lineare Konstruktionen.

Zweiter Teil.

Quadratische Konstruktionen.

Dritter Teil.

Kubische Konstruktionen.

Vierter Teil.

Höhere algebraische und transzendente Konstruktionen. — Anwendungen und Ergänzungen zu den vorhergehenden Teilen.

Fünfter Teil.

Numerische Approximationen.

Sechster Teil.

Analytische Approximationen.

Siebenter Teil.

Konstruktive Approximationen.

Bezeichnungen.

> Dans les Sciences mathématiques une bonne notation a la même importance philosophique qu'une bonne classification dans les Sciences naturelles.
>
> Poincaré.

Gleich $=$

Ungleich $\neq$

Nahe gleich $\doteq$

Größer $>$

Kleiner $<$

Etwas größer $\dot{=}$

Etwas kleiner $\underset{\cdot}{=}$

Zahlen $a, b, c, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$

Punkte $A, B, \ldots, (\mathfrak{A}\mathfrak{B}), (\mathfrak{A}\mathsf{A}), (\mathsf{A}\mathsf{B}\Gamma), \ldots$

Gerade $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots, [\mathsf{AB}], [AB], \ldots$

Ebenen $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \ldots, \{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\}, \{\mathfrak{A}A\}, \{ABC\}, \ldots$

Winkel $\angle ABC, \angle \mathfrak{A}\mathfrak{B}, \angle \mathfrak{A}\mathsf{A}, \angle \mathsf{AB}, \alpha, \beta, \ldots$

Strecken $AB, a, b, \ldots$

Abstände $A\mathsf{A}, A\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\mathfrak{B}, \mathfrak{A}\mathsf{A}, \mathsf{AB}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$

Bogen $\widehat{AB}, \ldots$

Parallel $\parallel$

Senkrecht $\perp$

Ähnlich $\sim$

Kongruent $\simeq$

(ABC) Verhältnis

$(ABCD)$ Doppelverhältnis

$|a|$ absoluter Wert

$[a]$ größte ganze Zahl $\leqq a$

$x \,\Big\|\, \frac{1}{x}$ x ersetzt durch $\frac{1}{x}$ (u. dgl.)

$\left.\begin{matrix} s_n, u_n, i_n \\ S_n, U_n, J_n \end{matrix}\right\}$ Seite, Umfang, Inhalt eines einem Bogen $\left\{\begin{matrix}\text{ein-}\\ \text{an-}\end{matrix}\right\}$ beschriebenen (regulären) n-$\left\{\begin{matrix}\text{Ecks}\\ \text{Seits}\end{matrix}\right.$

crd Sehne

Erster Teil.

Lineare Konstruktionen.

Kapitel I.

Projektive lineare Konstruktionen.[1])

Als Fundamentalaufgabe (konstruktives Postulat) im Gebiete der projektiven linearen Konstruktionen ist das mit dem Lineal allein ausführbare Verbinden zweier Punkte durch eine Gerade anzusehen. Das Aufsuchen des Schnittpunkts zweier Geraden wird als keine besondere Operation betrachtet, der Punkt vielmehr als mit den Geraden zugleich gegeben angenommen. Die Hauptfrage ist: Wie sind diejenigen Punkte und Geraden (das projektiv lineare Netz) zu charakterisieren, die sich durch bloßes Verbinden und Schneiden aus gegebenen Grundpunkten und -geraden ergeben?

Um diese Frage zu beantworten, müssen wir die Theorie der *Doppelverhältnisse* [2]) vorausschicken. Unter dem Doppelverhältnis $(ABCD)$ von 4 Punkten einer Geraden verstehen wir die Größe:

$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD},$$

A B C D

die offenbar unverändert bleibt, wenn man das erste Paar AB mit dem zweiten CD oder wenn man A mit B und zugleich C mit D vertauscht. Dabei sind aber die Strecken mit einem Vorzeichen zu nehmen, entsprechend einem auf der Geraden willkürlich festgesetzten Sinne, so daß z. B.

$$AB = -BA,$$

1) Derartige Konstruktionen gehen zurück auf F. Schooten, Exerc. math. II (Leyden 1657); J. H. Lambert, Freie Perspektive, Zürich 1759, 2. Aufl. 1774. Von Lambert stammt die Bezeichnung „Linealgeometrie". Servois, Solutions peu connues de différents problèmes de géometrie pratique (Metz 1804); Ch. J. Brianchon, Application de la théorie des transversales (Paris 1818); Poncelet, Réflexions sur l'usage de l'analyse algébrique dans la géometrie; suivies de la solution de quelques problèmes dépendant de la géometrie de la règle, Gerg. Ann., Bd. 8 (1817, 1818), p. 141 ff. und Traité des propriétés projectives des figures (Paris 1822), 2. Aufl. 1864.

2) Doppelverhältnisse finden sich wohl zuerst bei Pappus, s. Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt ed. F. Hultsch (Berlin 1876/78), p. 871.

also bei jeder Lage von A, B, C immer

$$AB + BC = AC,$$

also

$$AB + BC + CA = 0$$

ist.[1])

Dann gelten für Doppelverhältnisse die folgenden beiden fundamentalen Relationen:

$$\left.\begin{aligned}(ABCD) + (ACBD) &= 1,\\ (ABCD) \cdot (ABDC) &= 1.\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Die zweite dieser Relationen ist auch in der allgemeineren Form

$$(ABCD)(ABDE) = (ABCE), \qquad (2)$$

aus der für $E = C$ die speziellere folgt, unmittelbar evident; die erste folgt aus der Identität:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD + CA \cdot BD = 0,$$

von deren Richtigkeit man sich überzeugt, indem man in ihr

$$AB = AD - BD,$$
$$BC = BD - CD,$$
$$CA = CD - AD$$

einsetzt.

Zufolge der zulässigen Vertauschungen werden die 24 Doppelverhältnisse, zu denen die vier Punkte A, B, C, D infolge der 24 Permutationen Veranlassung geben, zu je vier einander gleich, und der Zusammenhang zwischen den sechs verschiedenen Werten ergibt sich aus den Relationen (1). Es wird nämlich für $(ABCD) = \lambda$:

$$\left.\begin{aligned}(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA) &= \lambda,\\ (ABDC) = (BACD) = (CDBA) = (DCAB) &= \frac{1}{\lambda},\\ (ACBD) = (BDAC) = (CADB) = (DBCA) &= 1 - \lambda,\\ (ADBC) = (BCAD) = (CBDA) = (DACB) &= 1 - \frac{1}{\lambda},\\ (ACDB) = (BDCA) = (CABD) = (DBAC) &= \frac{1}{1-\lambda},\\ (ADCB) = (BCDA) = (CBAD) = (DABC) &= \frac{1}{1-\frac{1}{\lambda}}\end{aligned}\right\}.^{2)} \qquad (3)$$

---

1) Diese eindeutige Definition der Strecke AB ist zuerst von A. F. Möbius (Baryzentrischer Kalkul. Leipzig 1827, § 1 = Werke I, p. 25) aufgestellt worden, nachdem bereits L. N. M. Carnot (Géometrie de position, Paris 1803; Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace; suivi d'un essai sur la théorie des transversales, Paris 1806) gezeigt hatte, wie man eine Formel auf alle möglichen Fälle der Figur durch das „Prinzip der Korrelation der Vorzeichen" übertragen könne.

2) Siehe Möbius l. c., § 184.

Durch das Zusammenfallen irgend zweier der vier Punkte ergeben sich die folgenden *singulären* Fälle:

$(ABCD) = 0$, wenn entweder $A = C$ oder $B = D$ ist,
$(ABCD) = 1$; d. h. $(ACBD) = 0$, wenn entweder $A = B$ od. $C = D$ ist,
$(ABCD) = \infty$; d. h. $(ABDC) = 0$, „ „ $A = D$ „ $B = C$ „

Außerdem sind von Wichtigkeit die Fälle der *Harmonie*[1]) und *Äquianharmonie*.[2]) Sind nämlich von den 6 Werten:

$$\lambda, \quad \frac{1}{1-\lambda}, \quad 1-\frac{1}{\lambda},$$
$$\frac{1}{\lambda}, \quad \frac{1}{1-\frac{1}{\lambda}}, \quad 1-\lambda$$

die *über*einanderstehenden einander gleich, so ist:

$$\lambda^2 = 1, \quad \lambda = -1,$$

weil der Wert $+1$ nur beim Zusammenfallen zweier Punkte eintreten kann. Die sechs verschiedenen Werte des Doppelverhältnisses reduzieren sich dann auf die drei verschiedenen Werte:

$$-1, \quad 2, \quad \frac{1}{2}.$$

Daraus folgt:

$$AC : BC = -AD : BD,$$

und man sagt: Die Strecke AB ist durch C und D *harmonisch* oder von innen und außen in gleichem Verhältnis geteilt.

Sind aber von jenen sechs Werten je drei *neben*einanderstehende einander gleich, also:

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0,$$

d. h.

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2},$$

so reduzieren sich jene sechs Werte des Doppelverhältnisses auf diese zwei Werte. In diesem Falle nennt man die vier Punkte, die dann natürlich nicht alle reell sind, *äquianharmonisch* gelegen.

Nimmt man einen Anfangspunkt O auf der Geraden an und setzt die „Abszissen“:

$$OA = x_1, \quad OB = x_2, \quad OC = x_3, \quad OD = x_4,$$

ferner

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) = ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e,$$

1) Von den Pythagoreern eingeführt. Vgl. M. Cantor, Gesch. d. Math. I (Leipzig 1880), p. 140.

2) L. Cremona, Curve piane 1862, p. 27. Deutsch von M. Curtze (Greifswald 1865). Schröter, Math. Ann. 10 (1876), p. 420.

so überzeugt man sich durch einfache Ausrechnung, daß der Fall der Harmonie durch das Verschwinden der „kubischen Invariante“:

$$g_3 = \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ b, & c, & d \\ c, & d, & e \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{27}\left((x_3-x_1)(x_4-x_2)+(x_4-x_1)(x_3-x_2)\right)\left((x_2-x_1)(x_4-x_3)\right.$$
$$\left.+(x_4-x_1)(x_2-x_3)\right)\left((x_2-x_1)(x_3-x_4)+(x_3-x_1)(x_2-x_4)\right),$$

der Fall der Äquianharmonie durch das Verschwinden der „quadratischen Invariante“:

$$g_2 = ae - 4bd + 3c^2$$
$$= \frac{1}{12}\left\{(x_3-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)(x_2-x_1)+(x_2-x_3)^2(x_4-x_1)^2\right\},$$

der Fall der Singularität durch das Verschwinden der „Diskriminante“:

$$\Delta = g_2{}^3 - 27g_3{}^2$$
$$= \frac{1}{64}\left((x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_3-x_4)\right)^2$$

charakterisiert wird, oder auch, daß diese drei Fälle bzw. den Werten:

$$\infty, \quad 0, \quad 1$$

der „absoluten Invariante“:

$$\frac{g_2{}^3}{27\,g_3{}^2}$$

entsprechen.

Das *gemeinsame harmonische Paar* x, y zu 2 gegebenen a, a' und b, b' wird wie folgt gefunden[1]: aus

$$(a-x)(a'-y)+(a-y)(a'-x)=0$$

und

$$(b-x)(b'-y)+(b-y)(b'-x)=0$$

folgt

$$xy-\frac{1}{2}(x+y)(a+a')+aa'=0 \tag{4}$$

und

$$xy-\frac{1}{2}(x+y)(b+b')+bb'=0,$$

also zur Bestimmung von x und y:

---

1) Hierauf beruht Legendres Transformation der elliptischen Integrale. (Transc. ell. 1793, n° 5). Der Integrand

$$\frac{dz}{\sqrt{(a-z)(a'-z)(b-z)(b'-z)}}$$

geht nämlich durch $\frac{x-z}{y-z}=\mathfrak{t}$ bis auf einen Zahlenfaktor über in

$$\frac{d\mathfrak{t}}{\sqrt{(1-\lambda\mathfrak{t}^2)(1-\mu\mathfrak{t}^2)}}.$$

$$\frac{x+y}{2} = \frac{aa' - bb'}{(a+a') - (b+b')}, \quad xy = \frac{aa'(b+b') - bb'(a+a')}{(a+a') - (b+b')}.$$

Ferner wird

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \frac{(a-b)(a-b')(a'-b)(a'-b')}{((a+a')) - ((b+b'))^2},$$

woraus hervorgeht, daß bei reellen a, a', b, b' auch x und y reell sind, wenn und *nur* wenn dieser letztere Ausdruck größer als 0 ist, also wenn und nur wenn a und a' beide zwischen oder beide nicht zwischen b und b' liegen, ferner auch wenn von den beiden Paaren a, a' und b, b' das eine aus zwei konjugiert imaginären Zahlen, das andere ebenfalls aus zwei konjugiert imaginären oder aus zwei reellen Zahlen besteht.

Das Doppelverhältnis der vier Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ des Punktes S ist[1]):

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}) = \frac{\sin(\mathfrak{A}\mathfrak{C})}{\sin(\mathfrak{B}\mathfrak{C})} : \frac{\sin(\mathfrak{A}\mathfrak{D})}{\sin(\mathfrak{B}\mathfrak{D})}.$$

Dabei ist unter $(\mathfrak{A}\mathfrak{C})$, usw. der Winkel der Geraden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ mit einem bestimmten Vorzeichen, entsprechend einem willkürlich festgesetzten Drehungssinn um den Punkt S zu verstehen, so daß also z. B.:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = -(\mathfrak{B}\mathfrak{A}),$$
$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) + (\mathfrak{B}\mathfrak{C}) = (\mathfrak{A}\mathfrak{C}),$$
$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) + (\mathfrak{B}\mathfrak{C}) + (\mathfrak{C}\mathfrak{A}) = 0$$

ist, wobei von Vielfachen von 4 Rechten abgesehen wird. Der so definierte Winkel $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ ist noch zweideutig, da es zwei Winkel gibt, um die $\mathfrak{A}$ in gegebenem Drehungssinn gedreht mit $\mathfrak{B}$ zur Deckung kommt. Er wird eindeutig bestimmt, wenn man noch auf jeder der beiden Geraden einen Fortgangssinn festsetzt und verlangt, daß die Drehung die beiden Geraden auch ihrem Sinne nach zur Deckung bringt. Für das Doppelverhältnis ist diese Unterscheidung unnötig, da z. B. der Quotient $\frac{\sin \mathfrak{A}\mathfrak{C}}{\sin \mathfrak{B}\mathfrak{C}}$ bei Änderung des Sinnes auf $\mathfrak{C}$ unverändert bleibt. Werden die vier Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ von einer beliebigen fünften, nicht durch den Punkt S gehenden Geraden $\mathfrak{G}$ in den vier Punkten A, B, C, D geschnitten, so ist[2]):

$$S(ABCD) = (\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}) = (ABCD), \tag{5}$$

wie man durch Einsetzen von

$$AC = \frac{2 \cdot SA \cdot SC \sin(\mathfrak{A}\mathfrak{C})}{S\mathfrak{G}}$$

usw. verificiert.

1) Carnot, Transvers. 1806, p. 7. Poncelet, Traité, p. 9. Steiner, Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander (Berlin 1832), p. 7 = Werke I (Berlin 1881), p. 244.

2) Siehe Pappus l. c., p. 871, 891.

Dabei verstehen wir unter $S(ABCD)$ allgemein das Doppelverhältnis der vier von S nach A, B, C, D gezogenen Geraden; ebenso bedeute $\mathfrak{S}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D})$ das Doppelverhältnis der vier Schnittpunkte von $\mathfrak{S}$ mit den vier Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$.

Demnach werden vier Strahlen eines Punktes von jeder Geraden in vier Punkten desselben Doppelverhältnisses geschnitten und vier Punkte einer Geraden von jedem Punkte aus durch vier Strahlen desselben Doppelverhältnisses „projiziert", d. h. Doppelverhältnisse werden durch Projizieren und Schneiden nicht verändert.[1])

Zufolge dieser Eigenschaft wird (s. Fig.)

$$(ABCD) = (A'B'C'D) = (BACD) = \frac{1}{(ABCD)},$$

also

$$(ABCD) = -1,$$

weil (s. S. 3) der Wert $+1$ nur beim Zusammenfallen zweier Punkte eintreten könnte.[2])

Infolgedessen liegen die vier Punkte A, B, C, D harmonisch, und man erhält z. B. den vierten Punkt D zu den drei gegebenen Punkten A, B, C nach Wahl eines Punktes S nicht auf $[ABC]$ und eines Punktes T auf $[SC]$, aus

$$D = ([AB]\,[([AS]\,[BT])\,([AT]\,[BS])]).^{3)}$$

Sechs Punkte A, B, C, A', B', C' mit den Abszissen a, b, c, a', b', c' liegen „involutorisch" oder bilden eine „Involution" $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$, wenn

$$(ABCC') = (A'B'C'C)$$

ist.[4]) Die Bedingung läßt sich leicht in die Formen setzen:

$$(a-b')(b-c')(c-a') + (a'-b)(b'-c)(c'-a) = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} 1 & a+a' & aa' \\ 1 & b+b' & bb' \\ 1 & c+c' & cc' \end{vmatrix} = 0.$$

Aus der letzteren geht hervor, daß in einer Involution $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$ die

---

1) Pappus l. c., p. 871. Carnot l. c.

2) Pappus l. c., p. 875.

3) Diese wichtige Konstruktion stammt nach Steiner (Werke I, p. 290) von Ph. de la Hire (Sectiones conicae, Paris 1685).

4) G. Desargues, Brouillon proiect (Paris 1639), Oeuvres (Paris 1864) I, p. 119. Der Sache nach schon Pappus bekannt; l. c. p. 873. Desargues betrachtet zuerst Strahlbüschel und entsprechende Scharen von Kurven wie später allgemein Lamé (1818).

drei Paare $\binom{A}{A'}$, $\binom{B}{B'}$, $\binom{C}{C'}$ permutiert und die Elemente jedes Paares unter sich vertauscht werden dürfen. Auch folgt hieraus, daß die drei Paare ein gemeinsames harmonisches haben.[1]) Das Verschwinden dieser Determinante ist nämlich die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die drei Gleichungen der Harmonie (s. (4))

$$xy - \frac{1}{2}(x+y)(a+a') + aa' = 0,$$

$$xy - \frac{1}{2}(x+y)(b+b') + bb' = 0,$$

$$xy - \frac{1}{2}(x+y)(c+c') + cc' = 0$$

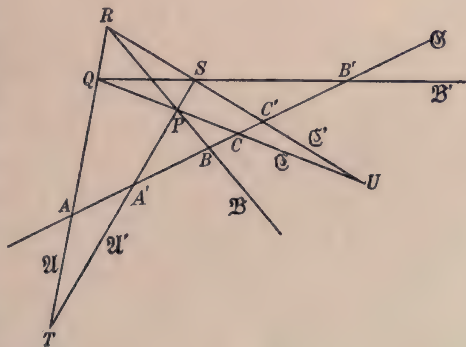
eine gemeinsame Lösung für xy und $x+y$ haben.

Die Harmonie $(ABCD) = -1$ ist mit der speziellen Involution $\binom{ABC}{ABD}$ identisch; denn man erhält für letztere $(ABCD) = (ABDC)$, also $= -1$. Ebenso entspricht dem Harmoniesatz am Viereck (s. S. 6) ein allgemeinerer Satz für die Involution, nämlich: Die sechs Schnittpunkte $ABCA'B'C'$ einer Geraden $\mathfrak{G}$ mit den sechs Seiten $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ eines Vierecks $PQRS$ sind in Involution.

In der Tat ist

$$(ABCA') = (ARQT) = (AC'B'A') = (A'B'C'A).$$

Dadurch läßt sich zu fünf Punkten der sechste involutorische mit dem Lineal allein finden, oder also, was dasselbe ist, der vierte harmonische C' zu drei Punkten XYC, von denen das Paar XY nicht explizite, sondern implizite, nämlich als gemeinsames harmonisches von zwei Paaren AA', BB' gegeben ist. Dasselbe ist durch bloße Harmonien zu bewerkstelligen (s. Aufg. 20 S. 21).



Acht Punkte $ABCDA'B'C'D'$ einer Geraden mit den Abszissen $abcda'b'c'd'$ liegen projektivisch oder bilden eine Projektivität $\binom{A\,B\,C\,D}{A'B'C'D'}$, wenn

$$(ABCD) = (A'B'C'D')$$

1) Siehe z. B. O. Hesse, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Geraden usw. (Leipzig 1865), p. 76.

ist. Die Involution $\begin{pmatrix} A\,B\,C \\ A'B'C' \end{pmatrix}$ ist mit der Projektivität $\begin{pmatrix} A\,B\,C\,C' \\ A'B'C'C \end{pmatrix}$ identisch. Man kann zu sieben gegebenen Punkten den achten projektivischen durch bloße Harmonien finden (s. Aufg. 21 S. 21).[1] Das ist von theoretischem Interesse; eine einfachere Auflösung dieser Aufgabe folgt weiter unten.

Diese Definitionen und Sätze sind ohne weiteres auf die Strahlen eines Punktes zu übertragen.

Allgemeiner nennt man die Gesamtheit der Punktpaare XX', für die

$$(ABXX') = (A'B'X'X)$$

oder, was dasselbe ist,

$$(ABA'X) = (A'B'AX')$$

ist, eine Involution, und für die

$$(ABCX) = (A'B'C'X')$$

ist, eine Projektivität.[2]

Daraus folgt:

$$BC \cdot A'C' \cdot AX \cdot B'X' - AC \cdot B'C' \cdot BX \cdot A'X' = 0,$$

d. h. für die Abszissen x, x' zweier entsprechender Punkte eine bilineare Relation:

$$\lambda - \mu' x - \mu x' + xx' = 0.$$

Genügen ihr $a, a', b, b', c, c', x, x'$, so erhält man durch Elimination von λ, μ', μ die Gleichung der Projektivität:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a' & aa' \\ 1 & b & b' & bb' \\ 1 & c & c' & cc' \\ 1 & x & x' & xx' \end{vmatrix} = 0,$$

die sich für $c = a'$, $c' = a$ leicht in die Gleichung der Involution überführen läßt:

$$\begin{vmatrix} 1 & a + a' & aa' \\ 1 & b + b' & bb' \\ 1 & x + x' & xx' \end{vmatrix} = 0.$$

Diese bilineare Gleichung zwischen x und x' ist *symmetrisch* $(\mu = \mu')$.

Also gibt es in einer Involution oder Projektivität *ein* Paar sich selbst entsprechender Punkte $X = X'$ und $Y = Y'$. In einer Involution

1) Siehe Wiener, Leipz. Akad. Ber. math. phys. Kl., Bd. 43 (1891), p. 670.

2) Steiner, Systematische Entwicklung I, Art. 10 = Werke, Bd. I, p. 261. Kollineation bei Möbius a. a. O., Kap. 7, Homographie bei Chasles, Géométrie supérieure (Paris 1852), Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie (Paris 1837, 2. Aufl. 1875), deutsch (Geschichte der Geometrie) von Sohnke (Halle 1839).

sind dann je zwei entsprechende Punkte wie AA' harmonisch zu X, Y. Entsprechend gibt es in einer Strahleninvolution oder -projektivität *ein* Paar sich selbst entsprechender Strahlen.

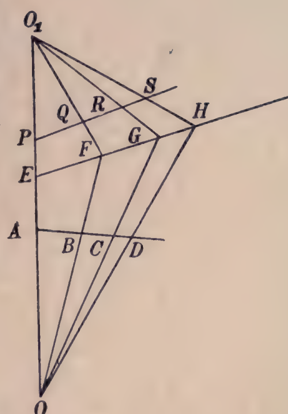
Unter dem *Antragen* eines Doppelverhältnisses $(PQRS)$ an drei Punkte ABC einer Geraden verstehen wir die Konstruktion desjenigen Punktes D, für den

$$(ABCD) = (PQRS)$$

ist.

Hierzu wähle man auf $[AP]$ zwei willkürliche Punkte O und O_1 und finde der Figur entsprechend:

$$D = \Big([AB]\big[O([O_1 S][([O_1 Q][OB])([O_1 R][OC])])\big]\Big).$$



Dabei wurden die beiden Geraden $[PQRS]$ und $[ABCD]$ als verschieden angenommen. Sonst übertrage man das Doppelverhältnis $(PQRS)$ erst auf eine von $[ABCD]$ verschiedene Gerade. In der Tatsache, daß durch beliebiges Übertragen eines Doppelverhältnisses, wenn man dasselbe schließlich an die drei Punkte A, B, C anträgt, stets derselbe vierte Punkt D gefunden wird, besteht der sog. „projektive Fundamentalsatz“. Hier ergibt sich derselbe ohne weiteres daraus, daß aus der Gleichung

$$(abcd) = \lambda \quad \text{oder} \quad \frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} = \lambda$$

sich d als linear gebrochene Funktion von λ, also *eindeutig* aus a, b, c, λ bestimmt.[1])

Das Doppelverhältnis $\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d}$ bleibt offenbar ungeändert, wenn man jede der 4 Abszissen $abcd$ um dieselbe Größe vermehrt oder vermindert, oder mit derselben Größe multipliziert oder dividiert, d. h. wenn man auf jede der 4 Größen dieselbe *affine* Transformation $x \,\|\, \alpha x + \beta$ ausübt. Es bleibt aber offenbar auch dann ungeändert, wenn man jede der vier Größen durch ihre Reziproke ersetzt, d. h. bei der *inversen* Transformation

$$x \left\| \frac{1}{x} \right.,$$

folglich auch bei jeder beliebigen *projektiven* Transformation

$$x \left\| \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \right., \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0) \quad (6)$$

denn es ist

$$\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = \frac{\frac{\alpha}{\gamma}(\gamma x + \delta) + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma}}{\gamma x + \delta} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma(\gamma x + \delta)}$$

1) Möbius l. c., § 182.

aus zwei affinen Transformationen und einer Inversion zusammengesetzt. Damit erhalten wir von neuem den Zusammenhang zwischen x und x' in einer Projektivität $(abcx) = (a'b'c'x')$. Infolgedessen ist ferner das Doppelverhältnis von vier Punkten $PQRS$ gleich dem Doppelverhältnis der vier Doppelverhältnisse $(ABCP)$, $(ABCQ)$, $(ABCR)$, $(ABCS)$ bei beliebigen Punkten ABC.[1]) Denn jedes solche Doppelverhältnis $(ABCX)$ ist gleich $\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-x}{b-x}$, also eine linear gebrochene Funktion der Abszisse des Punktes X. Umgekehrt ist eine beliebige linear gebrochene Funktion $k \cdot \frac{b-x}{a-x}$ stets als Doppelverhältnis von x mit denjenigen drei Werten a, b, c des x anzusehen, für welche das Doppelverhältnis die Werte 0 (für $x = b$), ∞ (für $x = a$), 1 (für $x = c$) annimmt; denn aus dem letzteren folgt

$$k \frac{b-c}{a-c} = 1, \quad \text{also ist} \quad \frac{a-c}{b-c} : \frac{a-x}{b-x}$$

die gegebene linear gebrochene Funktion.

Konstruktion rationaler Funktionen von Doppelverhältnissen.

Im folgenden sollen alle Doppelverhältnisse in der Form

$$(ABCX)$$

mit drei fest gegebenen Grundpunkten A, B, C entweder gegeben sein oder konstruiert werden.

I. **Das Negative eines gegebenen Doppelverhältnisses $(ABCD)$ zu konstruieren.**

Man konstruiere zu A, B, D den 4ten harmonischen Punkt X, so ist:

$$(ABCX) = (ABCD)(ABDX) \text{ (nach (1))}$$
$$= -(ABCD)$$

das gesuchte Doppelverhältnis.

II. **Das Reziproke zu einem gegebenen Doppelverhältnis $(ABCD)$ zu konstruieren.**

Man konstruiere den Punkt X so, daß

$$(ABCX) = (ABDC)$$

ist; dann wird

$$(ABCX) = (ABDC) = \frac{1}{(ABCD)} \text{ (nach (1))}$$

das gesuchte Doppelverhältnis.

III. **Zu einem gegebenen Doppelverhältnis $(ABCD)$ die Ergänzung zu 1 als Doppelverhältnis zu konstruieren.**

---

1) Möbius l. c., § 186.

Man konstruiere X so, daß

$$(ABCX) = (ACBD) = 1 - (ABCD) \quad \text{(nach (1))}$$

ist; dann ist

$$(ABCX)$$

das gesuchte.

IV. **Das Produkt zweier Doppelverhältnisse $(ABCD)$ und $(ABCE)$ als Doppelverhältnis zu konstruieren.**

Man konstruiere X so, daß

$$(ABDX) = (ABCE)$$

ist; dann ist

$$\begin{aligned}(ABCX) &= (ABCD) \cdot (ABDX); \quad \text{(nach (2))}\\ &= (ABCD) \cdot (ABCE)\end{aligned}$$

das gesuchte.

V. **Den Quotienten zweier Doppelverhältnisse** konstruiert man, indem man nach IV. das Produkt des einen mit dem nach II. gefundenen Reziproken des anderen konstruiert.

VI. **Die Differenz zweier Doppelverhältnisse $(ABCE)$ und $(ABCD)$ zu konstruieren.**

Man konstruiere nach V. den Punkt F so, daß

$$\frac{(ABCD)}{(ABCE)} = (ABCF)$$

ist; dann nach III. den Punkt G so, daß:

$$1 - (ABCF) = (ABCG)$$

ist; schließlich nach IV. den Punkt X so, daß:

$$(ABCE)(ABCG) = (ABCX)$$

ist. Dann ist

$$\begin{aligned}(ABCX) &= (ABCE)(ABCG)\\ &= (ABCE)(1 - (ABCF))\\ &= (ABCE)\left\{1 - \frac{(ABCD)}{(ABCE)}\right\}\\ &= (ABCE) - (ABCD)\end{aligned}$$

also das gesuchte.

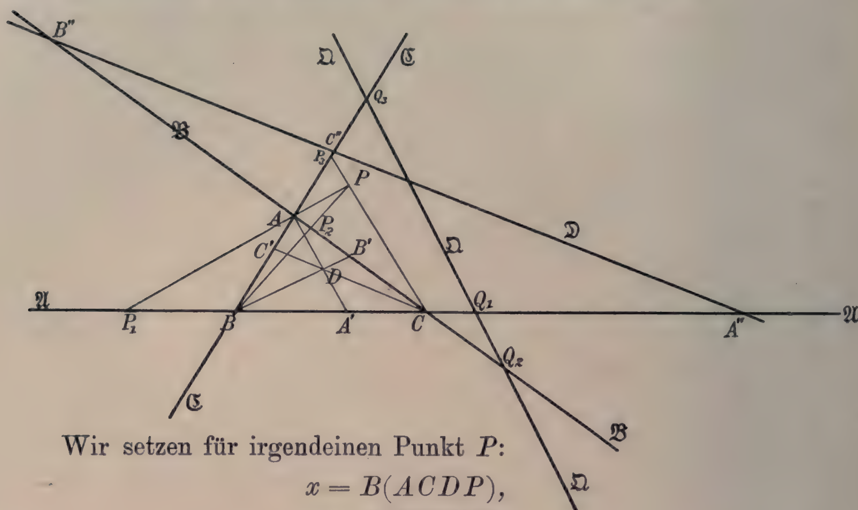
VII. **Die Summe zweier Doppelverhältnisse** konstruiert man, indem man nach VI. die Differenz des einen und des nach I. konstruierten Negativen des anderen konstruiert.

Also kann man durch beliebiges Verbinden und Schneiden eine beliebige rationale Funktion von gegebenen Doppelverhältnissen wieder als Doppelverhältnis konstruieren.

Zum Zwecke der *Umkehrung dieses Satzes* führen wir für die ge-

gebenen und zu konstruierenden Punkte und Geraden projektive oder Doppelverhältnis*koordinaten* ein. [1])

Um durch Verbinden und Schneiden neue Punkte zu finden, müssen mindestens vier Punkte A, B, C, D gegeben sein, von denen keine drei in einer Geraden liegen. Solche vier Punkte wählen wir als Grundpunkte der folgenden *Doppelverhältniskoordinaten.*



Wir setzen für irgendeinen Punkt P:

$$x = B(ACDP),$$
$$y = A(BCDP);$$

und irgendeine Gerade $\mathfrak{Q}$:

$$\xi = \mathfrak{B}(\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{Q}),$$
$$\eta = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{Q});$$

darin bedeuten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die Seiten des Dreiecks ABC; A', B', C' die Punkte $(\mathfrak{A}[AD])$, $(\mathfrak{B}[BD])$, $(\mathfrak{C}[CD])$, $\mathfrak{D}$ die Gerade $A''B''$, worin $A'A''$ die Strecke BC und $B'B''$ die Strecke AC harmonisch teilt.

Insbesondere ist für alle Punkte auf $[AC]$ $y = 0$, für alle Punkte auf $[BC]$ $x = 0$ zu setzen, und für alle Punkte auf $[AB]$ wird $x = \infty$, $y = \infty$, für D wird $x = y = 1$. Ferner ist $\xi = 0$, $\eta = \infty$ für $[AC]$ und $\xi = \infty$, $\eta = 0$ für $[BC]$, $\xi = 0$, $\eta = 0$ für $[AB]$.

Infolgedessen heißt C der Nullpunkt, D der Einheitspunkt, $[AC]$ die x-Achse, $[BC]$ die y-Achse, $[AB]$ die Fluchtlinie, A der Fluchtpunkt der X-Achse, B der Fluchtpunkt der Y-Achse.

---

1) Koordinaten einer Geraden (und Ebene) führte J. Plücker ein (Crelles J. V (1829), p. 1, VI (1829), p. 107) = Werke I (Leipzig 1895), p. 124, 178; Analytisch-geometrische Entwicklungen II (Essen 1831). — Dem herrschenden Gebrauch entgegen, nach welchem projektive Koordinaten immer in homogener Form angenommen werden, wird hier gezeigt, daß auch nicht homogene dieselben Dienste leisten. Natürlich nehmen diese auch den Wert ∞ an.

Mit Rücksicht auf S. 10 folgt jetzt, daß das Doppelverhältnis von vier Punkten

$$(x_h, y_h) \qquad (h = 1, 2, 3, 4)$$

einer Geraden gleich $(x_1 x_2 x_3 x_4)$ oder auch gleich $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ ist, und daß das entsprechende für vier Gerade eines Punktes gilt.

Wir machen später vom *Satz des Ceva* (1678)[1]) Gebrauch, demzufolge ist

$$(BCA'P_1)(CAB'P_2)(ABC'P_3) = 1$$

oder, was dasselbe ist,

$$\frac{x}{y} = (ABC'P_3),$$

wenn $P_1 = (\mathfrak{A}[PA])$, $P_2 = (\mathfrak{B}[PB])$, $P_3 = (\mathfrak{C}[PC])$ ist.

Nach dem dualen Satz, dem *Satz des Menelaus* (98 n. Chr.)[2]), ist das Produkt der drei Doppelverhältnisse gleich Eins, welche von zwei Geraden auf den drei Seiten eines Dreiecks gebildet werden. (Beweise s. S. 28, 29.)

Wenn der Punkt P auf der Geraden $\mathfrak{Q}$ liegt, ist:

$$\begin{aligned} y\eta &= (BCA'P_1)(CBA''Q_1) = (CBA''A')(CBA'Q_1)(BCA'P_1) \\ &= -(CBA'Q_1)(BCA'P_1) = -(BCQ_1A')(BCA'P_1) \\ &= -(BCQ_1P_1), \text{ ebenso ist} \\ x\xi &= -(ACQ_2P_2), \end{aligned}$$

oder wenn man A, C, Q_2, P_2 durch P auf die Gerade BC projiziert:

$$x\xi = -(P_1CQ_1B) = -(BQ_1CP_1)$$

oder nach (1):

$$x\xi = -(1 - (BCQ_1P_1)).$$

Also ist:

$$x\xi + y\eta + 1 = 0 \tag{7}$$

die Bedingung dafür, daß der Punkt (x, y) auf der Geraden $[\xi, \eta]$ liegt.

Wir ziehen daraus noch die Folgerung, daß mit zwei Punkten $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ auch jeder Punkt

$$P\left(x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}\right) \tag{8}$$

auf einer Geraden liegt. Denn es wird

$$\begin{aligned} &(x_1 + \lambda x_2)\xi + (y_1 + \lambda y_2)\eta + (1 + \lambda) \\ &\qquad = (x_1\xi + y_1\eta + 1) + \lambda(x_2\xi + y_2\eta + 1) = 0, \end{aligned}$$

dabei ist

$$\lambda = \frac{x_1 - x}{x - x_2} = \frac{y_1 - y}{y - y_2} = \frac{PP_1}{P_2P}. \tag{9}$$

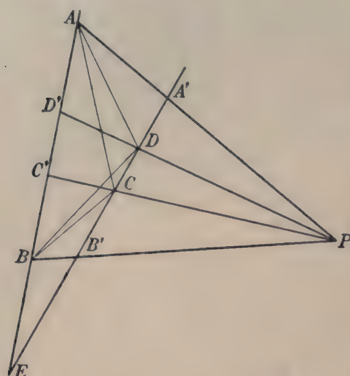
---

1) Vgl. Chasles' Aperçu, Übersetzung, p. 299; Möbius, Baryc. Calc., § 198.

2) Sphäricorum libri tres ed. Maurolykus v. Messina 1558; ed. Halley, Oxoniae 1707, III, 1. Vgl. Ptolemäi, Almagest I, 9; Schubert, Nov. Act. Petrop. 12 (1796), p. 165; Carnot, Transvers. 3: Möbius, Baryc. Calc., § 198.

Dies vorausgeschickt ist nunmehr zu beweisen, daß durch bloßes Verbinden und Schneiden nur solche Punkte und Geraden konstruiert werden können, deren Koordinaten rationale Funktionen der Koordinaten der gegebenen Punkte und Geraden sind.

Zunächst läßt sich zeigen, daß jedes solche Doppelverhältnis $P(ABCD)$ rational durch die Koordinaten x, y des Punktes P ausdrückbar ist.



Es ist nämlich:

$$P(CDAB) = (CDA'B');$$

ferner:

$$A(CDPB) = (CDA'E),$$
$$B(CDAP) = (CDEB').$$

Also nach (2):

$$P(CDAB) = A(CDPB) \cdot B(CDAP).$$

Folglich nach (3):

$$P(CDAB) = \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{y}}.$$

Ferner ist nachzuweisen, daß die Koordinaten des Schnittpunktes $P(x, y)$ zweier Geraden $[QR]$ (ξ_1, η_1) und $[TS]$ (ξ_2, η_2) sich rational durch die Koordinaten von Q, R, S, T ausdrücken. In der Tat ergeben sich nach (7) x und y aus den Gleichungen:

$$x\xi_1 + y\eta_1 + 1 = 0,$$
$$x\xi_2 + y\eta_2 + 1 = 0$$

und die Koordinaten ξ_1, η_1 der Geraden $[QR]$ aus:

$$\xi_1 x_Q + \eta_1 y_Q + 1 = 0,$$
$$\xi_1 x_R + \eta_1 y_R + 1 = 0$$

und die Koordinaten ξ_2, η_2 der Geraden $[ST]$ aus:

$$\xi_2 x_S + \eta_2 y_S + 1 = 0,$$
$$\xi_2 x_T + \eta_2 y_T + 1 = 0.$$

Sind jetzt Q, R, S, T konstruierte Punkte und

$$P = ([QS], [RT])$$

ein neuer, so entstehen die folgenden neuen Doppelverhältnisse:

$$x_P = B(ACDP),$$
$$y_P = A(BCDP),$$
$$P(CDAB) = A(CDPB) \cdot B(CDAP),$$

welche alle nach dem Vorhergehenden rationale Funktionen der vor-

her vorhandenen Doppelverhältnisse sind. Schließlich ist auch noch das Doppelverhältnis $(PP'P''P''')$ von vier konstruierten Punkten einer Geraden gleich dem Doppelverhältnis $(xx'x''x''')$. Analog für Gerade.

Wir nennen die Doppelverhältnisse, die durch gegebene bzw. durch gegebene und konstruierte Punkte und Geraden geliefert werden (wozu also auch die Koordinaten gehören), gegebene bzw. konstruierte Doppelverhältnisse.

Durch projektiv-lineare Konstruktion werden also alle und nur die Doppelverhältnisse konstruierbar, welche rational von den gegebenen abhängen (projektiv lineares Netz).

Begriffe, Sätze und Aufgaben aus der Theorie der Kegelschnitte.

Ein Kegelschnitt, eine Kurve zweiter „Ordnung", hat mit jeder Geraden zwei Punkte gemein und wird durch eine Gleichung zweiten Grades $f(x, y) = 0$ zwischen den Koordinaten x, y definiert; da eine solche von fünf Koeffizientenverhältnissen abhängt, ist ein Kegelschnitt durch fünf beliebige Punkte (von denen nicht vier in einer Geraden liegen) eindeutig bestimmt. Nimmt man insbesondere die vier Punkte A, B, C, D des Koordinatensystems auf dem Kegelschnitt an, so muß die Gleichung zweiten Grades die Form annehmen:

$$xy - \lambda y - \mu x = 0,$$

mit $\lambda + \mu = 1$. Man erkennt dies, indem man in die Gleichung $f(x, y) = 0$ die Koordinaten der vier Punkte:

$$A\begin{Bmatrix} x_A = \infty \\ y_A = 0 \end{Bmatrix}, \quad B\begin{Bmatrix} x_B = 0 \\ y_B = \infty \end{Bmatrix}, \quad C\begin{Bmatrix} x_C = 0 \\ y_C = 0 \end{Bmatrix}, \quad D\begin{Bmatrix} x_D = 1 \\ y_D = 1 \end{Bmatrix}$$

einsetzt. Für irgendeinen Punkt $P(x, y)$ des Kegelschnitts ist:

$$P(CDAB) = A(CDPB) \cdot B(CDAP) = \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{y}} = -\frac{\mu}{\lambda} = 1 - \frac{1}{\lambda},$$

folglich sind

$$\lambda, \quad \frac{1}{\lambda}, \quad 1 - \lambda, \quad \frac{1}{1 - \lambda}, \quad \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda}}, \quad \frac{\lambda}{\lambda - 1}$$

die sechs Werte des Doppelverhältnisses der von P nach A, B, C, D gezogenen Graden. *Die Konstanz dieses Doppelverhältnisses für jeden Punkt des Kegelschnitts ist die projektive Fundamentaleigenschaft des Kegelschnitts.*[1]) Sie liefert eine doppelte Art der Kegelschnitterzeugung:

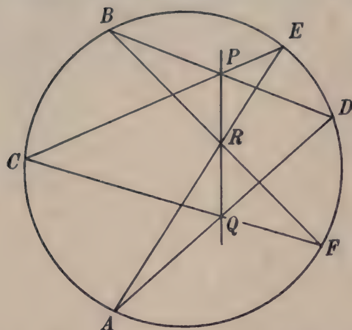
1) Der Ursprung dieser Erkenntnis ist in zwei von Pappus (l. c. p. 653/55) überlieferten Euklidischen Porismen zu erblicken.

einmal ist der Kegelschnitt Ort der Punkte P, für die $P(ABCD)$ einen gegebenen Wert hat, andererseits der Ort der Schnittpunkte D entsprechender Strahlen $[OD]$, $[PD]$ in zwei projektiven Strahlbüscheln $O(ABCD)$ und $P(ABCD)$. Entsprechende Erzeugungen bestehen für die Tangenten.

Zu den vier beliebigen Punkten A, B, C, D des Kegelschnitts $xy - \lambda y - \mu x = 0$ nehmen wir zwei weitere beliebige

$$E\left(x = \lambda + \frac{\mu}{e},\ y = \lambda e + \mu\right), \quad F\left(x = \lambda + \mu f,\ y = \frac{\lambda}{f} + \mu\right)$$

hinzu und betrachten das dem Kegelschnitt eingeschriebene Sechseck



$AECFBD$. Die gegenüberliegenden Seiten desselben

$$BD(x=1) \quad \text{und} \quad CE(y=ex)$$

schneiden sich im Punkte $P(x=1, y=e)$, ebenso die gegenüberliegenden Seiten $AD(y=1)$ und $CF(x=fy)$ im Punkte $Q(x=f, y=1)$, und die gegenüberliegenden Seiten

$$AE(y=\lambda e + \mu) \text{ und } BF(x = \lambda + \mu f)$$

im Punkte $R(x = \lambda + \mu f,\ y = \lambda e + \mu)$; und diese drei Schnittpunkte P, Q, R gegenüberliegender Seiten liegen nach (8) auf einer Geraden, weil

$$x_R = \lambda x_P + \mu x_Q, \quad y_R = \lambda y_P + y_Q$$

ist (Pascalscher Satz [1])). Übrigens ist deren Gleichung

$$(e-1)x + (f-1)y + (1-ef) = 0.$$

Dieser Satz ermöglicht die Konstruktion eines sechsten Punktes zu fünf gegebenen Punkten [2]), so daß also auch hieraus wieder folgt, daß ein Kegelschnitt durch fünf Punkte (deren keine vier in

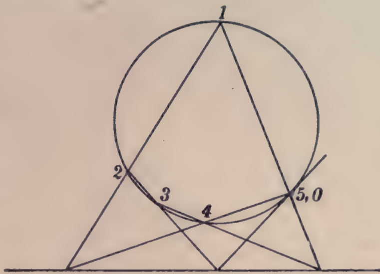
1) Pascal, Essai pour les coniques, lemme 1. Oeuvres (La Haye 1779) IV, p. 1ff. Der spezielle Fall dieses Satzes, in dem der Kegelschnitt aus zwei Geraden besteht und der für die Grundlagen der Geometrie von besonderer Bedeutung geworden ist (s. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1903, Kap. VI), findet sich schon bei Pappus, l. c., p. 893. Über die Geschichte des Pascalschen Satzes s. E. Kötter, Die Entwicklung der synthetischen Geometrie, Dtsch. Math. Ver. V (Leipzig 1898), p. 14ff.

2) Solche Konstruktionen, aber auf Grund einer affinen Spezialisierung des Desargueschen Involutionssatzes vom Viereck im Kegelschnitt (s. S. 51) finden sich zuerst bei Pappus (l. c., p. 1077ff.), dann namentlich bei Newton (Philos. natur. princ. math., London 1687, I, 4, 5, p. 61ff.; Arithmetica universalis, Cambridge 1707, XIV, Probl. 57ff.; Ed. Gravesande, Leyden 1732, p. 169). Für die weitere Geschichte s. E. Kötter, l. c., p. 28ff.

einer Geraden liegen) eindeutig bestimmt ist und sich zwei Kegelschnitte in höchstens vier Punkten schneiden können. Sind die Punkte 1, 2, 3, 4, 5 und die Gerade [05], aber nicht der Punkt 0 gegeben, so erhält man den Punkt 0 des Kegelschnitts aus:

$$0 = \Big([([([12],[45]), ([23], [05])], [34])1] [05] \Big).$$

Ebenso kann man die Tangente in einem der fünf Punkte konstruieren. Läßt man nämlich den Punkt 0 in den Punkt 5 rücken, so geht die Sekante [05] in die Tangente des Punktes 5 über.



In dem Fünfeck 12345 muß der Schnittpunkt der Tangente in 5 und der dem Berührungspunkte 5 gegenüberliegenden Seite [23] mit den Schnittpunkten der Gegenseiten [51], [34] und [12], [45] auf einer Geraden liegen. Daraus ergibt sich die Konstruktion der Tangente im Punkte 5:

$$\Big[([([12], [45]), ([34], [15])], [23]), 5 \Big].$$

Weitere Sätze ergeben sich durch Verkümmerung von zwei oder drei Seiten.

Die Koeffizienten ξ, η einer Tangente genügen der Gleichung[1]):

$$\begin{vmatrix} a & f & e & \xi \\ f & b & d & \eta \\ e & d & c & 1 \\ \xi & \eta & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

die entwickelt gebe:

$$\alpha\xi^2 + \beta\eta^2 + \gamma + 2\delta\eta + 2\varepsilon\xi + 2\zeta\xi\eta = 0,$$

die Gleichung des Kegelschnitts als Enveloppe von Geraden ist also ebenfalls vom zweiten Grade: der Kegelschnitt ist eine Kurve zweiter Klasse, durch jeden Punkt gehen zwei Tangenten an ihn.

Der zum Pascalschen duale *Brianchon*sche *Satz* lautet[2]): *Die drei Hauptdiagonalen eines dem Kegelschnitt umbeschriebenen Sechsecks gehen durch einen Punkt.*

Dieser Satz gestattet die Konstruktion einer sechsten zu fünf gegebenen Tangenten oder des Berührungspunktes auf einer von fünf gegebenen Tangenten: Sind nämlich 1, 2, 3, 4, 5 die gegebenen Tan-

1) S. z. B. R. Baltzer, Analytische Geometrie (Leipzig 1882), p. 219.

2) Brianchon, J. de l'Éc. polyt. Cah. 13 (1806), p. 301; Corr. de l'éc. pol. (1806, 1807). Der eleganteste analytische Beweis folgt aus einem allgemeineren Satz von Plücker, Analyt. geom. Entwick. I, Art. 385.

genten und soll durch den Punkt (05) auf 5 die Tangente 0 konstruiert werden, so ergibt sich diese gleich:

$$\Big[\big(\big[\big([(23), (05)], [(12), (45)]\big), (34)\big], 1\big), (05)\Big];$$

ebenso ist der Berührpunkt auf der Tangente 5 gleich:

$$\Big(\big[\big([(12)\ (45)]\ [(34)\ (15)]\big)\ (23)\big]\ 5\Big).$$

Diese Formeln unterscheiden sich von denen bei fünf gegebenen *Punkten* nur durch die Vertauschung der Zeichen () und [].

Projektive Begriffe und Sätze und projektiv lineare Aufgaben.

1. Konstruktion des vierten harmonischen P' zu drei Punkten X, Y, P, wenn X, Y als Doppelpunkte einer Projektivität

$$(ABCZ) = (A'B'C'Z')$$

gegeben sind.

2. Zwei Punkte A, A' heißen „konjugiert harmonisch" in bezug auf einen Kegelschnitt, wenn AA' durch den Kegelschnitt harmonisch geteilt wird. Jeder Punkt auf der Geraden durch $A(x, y)$, $A'(x', y')$ ist nach (8) durch $\frac{x + \lambda x'}{1 + \lambda}$, $\frac{y + \lambda y'}{1 + \lambda}$ gegeben. Den Schnittpunkten $P_1(x_1 y_1)$, $P_2(x_2 y_2)$ von $[AA']$ mit dem Kegelschnitt

$$ax^2 + by^2 + c + 2dy + 2ex + 2fxy = 0$$

entsprechen diejenigen Werte λ_1, λ_2 von λ, für die

$$a(x + \lambda x')^2 + b(y + \lambda y')^2 + c(1 + \lambda)^2 + 2d(y + \lambda y')(1 + \lambda)$$
$$+ 2e(x + \lambda x')(1 + \lambda) + 2f(x + \lambda x')(y + \lambda y') = 0$$

ist. P_1, P_2 liegen harmonisch zu A, A', wenn $\frac{P_1 A}{P_1 A'} : \frac{P_2 A}{P_2 A'} = -1$, also $(x_1 x_2 x x') = -1$, also wegen (9) $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, also

$$axx' + byy' + c + d(y + y') + e(x + x') + f(xy' + x'y) = 0$$

ist. Dies ist also die Beziehung zwischen zwei konjugierten Punkten. Jeder Punkt des Kegelschnitts ist sich selbst konjugiert.

3. Demnach liegen alle konjugierten Punkte zu A' auf einer Geraden, deren Gleichung die eben hingeschriebene ist. Diese heißt die „Polare"[1]) von A' und A' der „Pol"[2]) dieser Geraden.[3]) Von zwei

1) Servois Gerg. Ann. I (1810 u. 1811), p. 337.

2) Gergonne Gerg. Ann. III (1812, 1813), p. 293. Rochat, p. 303, Puissant, p. 371.

3) Appollonius (lib. III, prop. 37). Pappus (l. c., p. 905). Namentlich Desargues, Brouillon project. (Oeuvres I). De la Hire, Nouv. math. en géom. (Paris 1673), Sectiones conicae (Paris 1685). Poncelet (Traité 196) u. Crelles J. IV (1829), p. 1 gründet darauf sein „Polaritätsprinzip", demzufolge aus jedem Satz, jeder

konjugierten Punkten liegt also jeder auf der Polare des andern. Ebenso sind konjugierte Gerade solche, von denen jede durch den Pol der andern geht. Die Polare geht durch die Berührpunkte der durch den Pol gehenden Tangenten. Tangente und Berührpunkt sind polar zueinander. Die Gleichung der Polare eines Kegelschnittpunktes ist die Gleichung seiner Tangente. Jede Tangente ist sich selbst konjugiert.

4. Ein Dreieck heißt „Poltripel", wenn jede Ecke Pol der Gegenseite ist. Wählt man ein Poltripel zum Koordinatendreieck ABC, so hat die Kegelschnittsgleichung die Form $ax^2 + by^2 + c = 0$. Denn dem Punkte $A(\infty, 0)$ ist der Punkt $C(0, 0)$ konjugiert; das gibt $\frac{c}{x_A} + e = 0$, also $e = 0$; ebenso folgt $d = 0$ daraus, daß die Punkte $B(0, \infty)$ und $C(0, 0)$ konjugiert sind, und drittens $f = 0$ daraus, daß die Punkte $A(\infty, 0)$, $B(0, \infty)$ konjugiert sind.

5. Sind aber $[AC]$, $[BC]$ Tangenten, A, B die Berührpunkte, so hat die Gleichung die Form $c + 2fxy = 0$, denn weil A und B zu C konjugiert sind, muß wie oben $d = 0$, $e = 0$ sein, die Tangente in A:

$$axx_A + byy_A + c + f(xy_A + yx_A) = 0$$

soll $[AC]$ mit der Gleichung $y = 0$ sein, also muß $a = 0$, ebenso $b = 0$ sein. Ebenso wird die Gleichung $ax^2 + 2dy = 0$, wenn $[AC]$ und $[AB]$ Tangenten sind, B, C ihre Berührpunkte.

6. Konstruktion des Pols zu einer gegebenen Geraden, der Polaren eines gegebenen Punktes in bezug auf einen durch fünf Punkte oder Tangenten gegebenen Kegelschnitt.

7. Konstruktion von Punkten und Geraden eines Kegelschnitts, wenn fünf Paare konjugierter Punkte (oder Tangenten) gegeben sind, oder wenn drei Poltripel gegeben sind.

8. Wenn von einem Kegelschnitt vier Punkte und die Tangente in einem oder drei Punkte und die Tangenten in zweien, oder drei Tangenten und die Berührpunkte zweier, oder vier Tangenten und der Berührpunkt einer gegeben sind, weitere Punkte und Tangenten derselben zu konstruieren.

9. Wenn von zwei Kegelschnitten je zwei Punkte oder Tangenten bzw. eine Tangente mit Berührpunkt und drei Schnittpunkte (drei Tangenten), oder wenn sie sich berühren, die Tangente, der Berührungspunkt und *ein* Schnittpunkt (eine gemeinsame Tangente) ge-

---

Aufgabe usw. durch Vertauschung der Worte Punkt und Gerade ein polarer Satz usw. hervorgeht, z. B. aus dem Pascalschen der Brianchonsche; dasselbe ohne Bezug auf einen Kegelschnitt leistet Gergonnes Dualitätsprinzip (Ann. 16 (1826), p. 209; 17, p. 216). Reziproke Figuren nennt Chasles „korrelativ", Chasles, Géom. sup., p. 413. Steiner, Syst. Entw., p. 165. Hesse, Crelles J. 18 (1838), p. 102, 20 (1840), p. 291, 36 (1848), p. 146.

geben sind, den andern Schnittpunkt (die andere gemeinsame Tangente) zu konstruieren.

10. Wenn von einem Kegelschnitt *zwei* Punkte oder Tangenten oder eine Tangente mit Berührpunkt gegeben ist und außerdem ein in einem gegebenen Punkte *drei*punktig berührender Kegelschnitt (durch fünf Punkte), oder wenn *ein* Punkt (oder eine Tangente) und ein in einem gegebenen Punkte *vier*punktig berührender Kegelschnitt (durch fünf Punkte) gegeben ist, weitere Elemente zu konstruieren. Dazu sind die Sätze aufzusuchen, die zwischen Punkten oskulierender Kegelschnitte bestehen.[1])

11. Existiert ein Poltripel des Kegelschnitts

$$ax^2 + by^2 + c + 2dy + 2ex + 2fxy = 0,$$

welches dem Kegelschnitt $\alpha'\xi^2 + \beta'\eta^2 + \gamma' + \cdots = 0$ umgeschrieben ist, dann existieren unendlich viele, und unendlich viele Poltripel des zweiten sind dem ersten einbeschrieben; diese Kegelschnitte heißen apolar[2]), und es besteht die Bedingung

$$a\alpha' + b\beta' + c\gamma' + 2d\delta' + 2e\varepsilon' + 2f\zeta' = 0.$$

Also ist die Aufgabe lösbar: einen Kegelschnitt zu konstruieren, der zu fünf gegebenen apolar ist oder zu dem fünf gegebene apolar sind; dies sind die natürlichen Erweiterungen der Aufgaben, einen Kegelschnitt aus fünf Punkten (Tangenten) oder aus fünf Paaren konjugierter Punkte (Geraden) usw. zu konstruieren. Die Apolaritätsbedingung ist genau analog zu der Harmoniebedingung

$$ac' + bb' + ca' = 0$$

zweier Paare $ax^2 + 2bx + c = 0$ und $a'x^2 + 2b'x + c' = 0$: Apolarität ist die Übertragung der Harmonie auf Kegelschnitte.

12. Von zwei Kurven dritter Ordnung sind vier Schnittpunkte und von jeder noch fünf Punkte gegeben; man soll Punkte des Kegelschnitts konstruieren, der durch die fünf übrigen Schnittpunkte geht.

13. Von zwei Kurven dritter Klasse sind vier gemeinsame Tangenten und von jeder noch fünf Tangenten gegeben; man soll Tangenten des Kegelschnitts konstruieren, der die fünf übrigen gemeinsamen Tangenten berührt.

14. Von den neun Schnittpunkten (bzw. gemeinsamen Tangenten) zweier Kurven dritter Ordnung (bzw. Klasse) sind acht gegeben; den neunten (bzw. die neunte) zu konstruieren.[3])

15. Von einer Kurve dritter Ordnung (Klasse) sind neun Punkte (Tangenten) gegeben, weitere zu konstruieren, z. B. die Schnittpunkte

---

1) Poncelet, Gerg. Ann. VIII (1817/18), p. 153; Traité, art. 320—325, 403.
2) Vgl. W. F. Meyer, Apolarität und rationale Kurven, Tübingen 1883.
3) Vgl. H. Durège, Ebene Kurven dritter Ordnung, Leipzig 1871.

mit einer Geraden (Tangente von einem Punkte), wenn zwei davon gegeben sind.

16. Alle diese mit dem Lineal allein ausführbaren Konstruktionen sind ihrer Natur nach projektiv, d. h. sie bleiben bei Projektion von einem beliebigen Punkte aus auf eine beliebige Ebene unverändert.

17. Konstruktion von Tangenten an algebraische Kurven, allgemeiner an Kurven, für die eine Differentialgleichung der Form besteht $\frac{dy}{dx}$ = rat. Funkt. von x und y.[1])

18. Entsprechend: Konstruktion von oskulierenden Kegelschnitten.

19. Konstruktion eines Kegelschnitts, der zwei gegebene doppelt berührt und durch einen gegebenen Punkt geht, oder eine gegebene Gerade berührt.[2])

20. Konstruktion des sechsten involutorischen C' zu fünf gegebenen Punkten $\begin{pmatrix} A\,B\,C \\ A'\,B' \end{pmatrix}$ durch bloße Harmonien. — Man finde die Punkte $C_1\,C_{12}\,C_2\,C_{21}\,C'$ der Reihe nach aus den Harmonien: $(AA'CC_1)$, $(BB'CC_2)$, $(AA'C_2C_{21})$, $(BB'C_1C_{12})$, $(CC'C_{12}C_{21})$.[3])

21. Konstruktion des achten projektivischen D' zu sieben gegebenen Punkten $\begin{pmatrix} A\;B\;C\;D \\ A'\,B'\,C' \end{pmatrix}$ durch bloße Harmonien. — Man konstruiere zu D den entsprechenden D_1 in der Involution $\begin{pmatrix} B\;C\;X \\ C'\,B'\,X' \end{pmatrix}$ und von diesem in der Involution $\begin{pmatrix} A\;C\;X \\ C'\,A'\,X' \end{pmatrix}$.[3])

Kapitel II.

Affine[4]) lineare Konstruktionen.

Zu den Fundamentalaufgaben des Verbindens und Schneidens ist die *Aufgabe des Parallelenziehens* hinzuzunehmen.

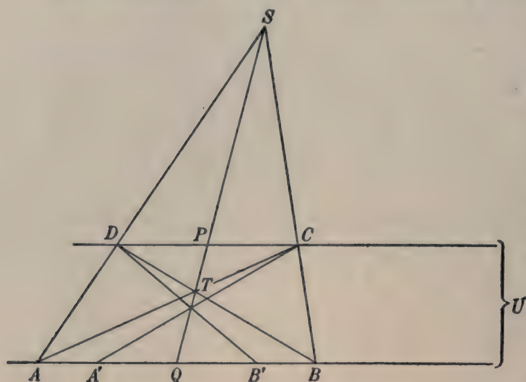
1) Vgl. z. B. die Tangentenkonstruktionen (die aber projektiv durchzuführen wären) an die Lemniskate: Steiner, Crelles J. XIV (1835), p. 80 = Werke II, p. 19, an die Quadratrix: Roberval, Mém. de l'acad. d. sc. VI, Paris 1730, p. 51.

2) Über Aufgaben, bei denen ein Kegelschnitt einen oder mehrere andere doppelt berühren soll, vgl. z. B. Poncelet, Traité 605; Laguerre, Nouv. ann. (2) XIX (1880), p. 279. Niemtschrick, Wien. Ber. 59 II (1869), Pelz 73 II (1876). W. Nauck, Ztschr. f. Realschulw. III (Wien 1878), p. 466.

3) Wiener, Leip. Akad. Ber. math. phys. Kl., Bd. 43 (1891), p. 670.

4) Affin nennt zuerst Euler (Introductio in analysin infinitorum. Tomus II. Lausanne 1748. Caput XVIII, art. 442, p. 239) eine projektive Verwandtschaft, bei welcher den unendlich fernen Punkten ebensolche entsprechen. Die Gesamtheit der Eigenschaften affiner Figuren betrachtet als besonderes Gebiet der Geometrie zuerst Möbius (Der Baryzentrische Kalkul, Leipzig 1827, Kap. 3 = Ges. Werke I, p. 177 ff.); vgl. auch: Anhang zu „Beobachtungen auf der königlichen Universität-Sternwarte zu Leipzig“ usw. Leipzig 1823, p. 57 ff. = Möbius, Ges. Werke I, p. 389 ff.

„Parallel“ heißen Gerade mit unendlich fernem Schnittpunkt. Der unendlich ferne Punkt paralleler Geraden heißt ihre „Richtung“.



Der Begriff „parallel“ hängt aufs engste zusammen mit dem Begriff „gleiche Strecken einer Geraden“.

Sind nämlich die Geraden $[AB]$ und $[CD]$ parallel, also ihr Schnittpunkt U unendlich fern, so sind (nach S. 6) die vier Punkte A, B, Q, U harmonisch, d. h.:

$$\frac{AQ}{BQ} = -\frac{AU}{BU} = -1,$$

also

$$AQ = QB.$$

Sind also die zwei Parallelen $\mathfrak{G} \| \mathfrak{H}$ gegeben, so kann man auf ihnen jede Strecke, z. B. AB auf $\mathfrak{G}$, halbieren: Nach Wahl von S ist der Halbierungspunkt

$$Q = \Big([AB]\,[S([B([SA]\,\mathfrak{H})]\,[A([BS]\,\mathfrak{H})])]\Big).$$

Umgekehrt folgt aus $AQ = QB$ die Parallelität von $[AB]$ und $[CD]$.

Ist aber die halbierte Strecke AQB gegeben, so kann man zu $[AB]$ durch einen beliebigen Punkt C die Parallele ziehen: Nach Wahl von S auf $[BC]$ findet man einen Punkt D der gesuchten Parallelen aus

$$D = \Big([AS]\,[B([AC]\,[QS])]\Big).$$

Die Gleichheit zweier Strecken AA' und $B'B$ einer Geraden wird dadurch definiert, daß die Strecken AB und $A'B'$ denselben Mittelpunkt Q haben sollen. Man kann also die Strecke AA' an B antragen, wenn eine dazu parallele Gerade oder der Mittelpunkt Q von AB gegeben ist:

$$B' = \Big([AB]\,[D([A'C]\,[SQ])]\Big).$$

Man kann ferner unter denselben Voraussetzungen eine Strecke ver-n-fachen $(CC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = \cdots C_{n-1}D)$, also auch eine Strecke, z. B. AB, in n gleiche Teile teilen, indem man die Teilpunkte C_1, $C_2, \ldots, C_{n-1}$ der Strecke CD von $S = ([AD]\,[BC])$ aus auf $[AB]$ projiziert. Also kann man überhaupt das $\frac{m}{n}$fache einer gegebenen Strecke auf derselben Geraden konstruieren.

Umgekehrt, ist eine rational geteilte Strecke gegeben, so kann man zu ihr Parallele ziehen. Denn ist das Verhältnis von $AC:CB$

wie das der teilerfremden Zahlen $a:b$ (mit $a > b$) gegeben, so liefert der vierte harmonische D zu A, B, C das Verhältnis

$$AB:BD = AD - BD:BD = \frac{AD}{BD} - 1:1 = \frac{a}{b} - 1 = a - b:b.$$

So fortfahrend gewinnt man durch bloße Harmonien weitere rational geteilte Strecken, deren Verhältnisse in kleineren Zahlen ausgedrückt sind, bis man zu einer im Verhältnis $1:1$, also halbierten Strecke kommt.

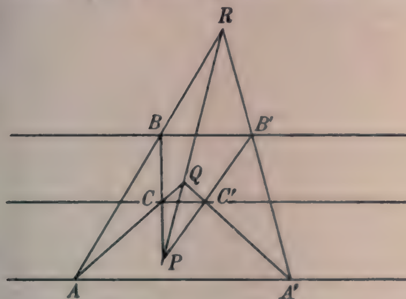
Das Datum einer rational geteilten Strecke ist also dem Datum einer halbierten Strecke, also dem Datum eines Parallelenpaares gleichwertig.

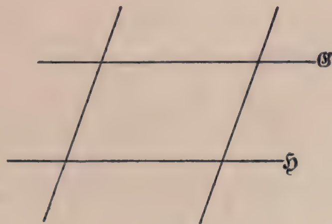
Im vorhergehenden ist natürlich auch die Lösung der Aufgabe enthalten: Wenn ein Parallelenpaar gegeben ist, durch irgendeinen Punkt eine Gerade derselben Richtung zu ziehen. Denn man kann zuerst auf der einen eine halbierte Strecke herstellen und dann zu ihr die Parallele ziehen. Eine direktere Auflösung dieser Aufgabe, ohne Vermittlung einer halbierten Strecke, ist die folgende.

Ist durch C eine Parallele zu $[AA'] \parallel [BB']$ zu ziehen, so lege man durch $R = ([AB][A'B'])$ eine beliebige Gerade $\mathfrak{G} = [PQR]$, dann ist

$$\Big[C([A'([AC]\mathfrak{G})][B'([BC]\mathfrak{G})])\Big]$$

die gesuchte Parallele. Denn die Schnittpunkte P, Q, R entsprechender Seiten der zwei Dreiecke ABC, $A'B'C'$ liegen auf einer Geraden ($\mathfrak{G}$), also gehen nach dem Desargueschen[1]) Satze die Ver-





bindungsgeraden entsprechender Ecken $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ durch einen, in diesem Fall unendlich fernen Punkt. Die Richtigkeit des Desargueschen Satzes folgt sofort daraus, daß die beiden Vierecke $BB'PR$, $AA'QR$ auf der Geraden $[CC']$ Involutionen bestimmen, die in fünf, also auch im sechsten Punkt übereinstimmen müssen.

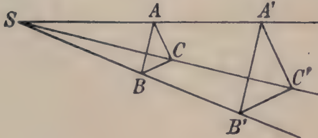
Aber man kann in keiner anderen Richtung zu einer gegebenen Geraden Parallele ziehen oder Strecken rational teilen. Denn an-

1) G. Desargues, Brouillon proiect. (Paris 1639), Œuvres (Paris 1864).

genommen, man hätte zu den zwei gegebenen parallelen Geraden $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ zwei sie schneidende parallele Gerade durch bloße Linealkonstruktion gefunden, so würden durch Zentralprojektion der Konstruktion auf eine zu $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ parallele Ebene die Parallelen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ in zwei parallele, die beiden andern Geraden dagegen in zwei nicht parallele Geraden übergehen, während doch eine solche Konstruktion projektiv sein müßte.

Sind dagegen zwei Paar Parallelen $\mathfrak{A} \parallel \mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B} \parallel \mathfrak{B}'$ gegeben, die ein Parallelogramm bilden, so bestimmen zwei Seiten desselben und die Parallele zu ihnen durch den Mittelpunkt des Parallelogramms auf *jeder* Geraden eine halbierte Strecke, so daß auch allgemein zu jeder Geraden durch jeden Punkt mit dem Lineal allein eine Parallele gezogen werden kann.

Aber das Paralleleziehen erfolgt direkter und einfacher nach dem Desargueschen Satze. Ist ABC das Dreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und $C' = (\mathfrak{A}'\mathfrak{B}')$, so nehme man S auf $[CC']$, dann ist



$$\mathfrak{C}' = \left[([SA]\mathfrak{B}')([SB]\mathfrak{A}')\right]$$

parallel zu $\mathfrak{C}$, da die Verbindungsgeraden $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ entsprechender Ecken der Dreiecke ABC, $A'B'C'$ durch einen Punkt S gehen, also die Schnittpunkte $(\mathfrak{A}\mathfrak{A}')$, $(\mathfrak{B}\mathfrak{B}')$, $(\mathfrak{C}\mathfrak{C}')$ auf einer, in diesem Fall unendlich fernen Geraden liegen müssen. Dieser zweite affine Spezialfall folgt vermittels des sog. Proportionallehrsatzes ohne weiteres aus $SA : SA' = SC : SC' = SB : SB'$; auch aus diesem speziellen Fall ergibt sich der allgemeine durch Projektion.

Ein Paar Parallelen bestimmt als Schnittpunkt einen Punkt auf der unendlich fernen Geraden, eine halbierte Strecke bestimmt einen solchen Punkt als vierten harmonischen zu drei gegebenen. Durch zwei Paar Parallelen bzw. halbierte Strecken werden also zwei Punkte der unendlich fernen Geraden, also diese selbst indirekt gegeben.

Statt zweier Parallelenpaare kann natürlich auch ein Parallelenpaar und eine rational geteilte Strecke (in anderer Richtung) gegeben sein; oder auch *drei* Parallele, die eine vierte Gerade in rationalem Verhältnisse schneiden; oder auch zwei parallele Strecken $AB \parallel CD$, die in rationalem Verhältnis $a : b$ zueinander stehen. Denn der letzte Fall kommt auf den vorhergehenden zurück, wenn man durch $T = ([AC][BD])$ die Parallele zu $[AB]$ zieht; dann hat man drei Parallele, die ATC im rationalen Verhältnis

$$AT : TC = AB : CD = a : b$$

schneiden.

Um die Punkte und Geraden zu charakterisieren, welche aus ge-

gebenen durch affine lineare Konstruktion hervorgehen, entwickeln wir *die Theorie der Verhältnisse.*

Unter dem Verhältnis $(ABC) = (abc)$ dreier Punkte A, B, C mit den Abszissen a, b, c wird der Quotient:

$$AC : BC = a - c : b - c$$

verstanden, der offenbar ungeändert bleibt, wenn man auf a, b, c dieselbe *affine* Transformation $x \parallel \alpha x + \beta$ anwendet, d. h. wenn man den Nullpunkt, von dem an die Abszissen zählen und die Maßeinheit (den Maßstab) ändert. Ist U der unendlich ferne Punkt der Geraden $[ABC]$, so ist also:

$$(ABC) = (ABCU).$$

Daraus oder auch direkt ergeben sich die beiden Fundamentalrelationen:

$$\left.\begin{aligned} (ABC) + (ACB) &= 1, \\ (ABC) \cdot (BAC) &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

und hieraus für die sechs Werte des Verhältnisses bei Vertauschungen der Buchstaben:

$$\left.\begin{aligned} (ABC) &= \lambda, \\ (BAC) &= \frac{1}{\lambda}, \\ (ACB) &= 1 - \lambda, \\ (CAB) &= \frac{1}{1-\lambda}, \\ (BCA) &= 1 - \frac{1}{\lambda}, \\ (CBA) &= \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda}}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Unter dem *Antragen* eines Verhältnisses (PQR) an zwei Punkte A, B verstehen wir die Konstruktion eines Punktes C, so daß:

$$(ABC) = (PQR)$$

ist.

Durch A ziehe man $\mathfrak{H}' \parallel \mathfrak{H}$, dann $QS \parallel RT \parallel PA$ und schließlich $[TC] \parallel [SB]$; oder in einer Formel:

$$C = \Big([AB]\Big[([R(PA)][A(PQ)])$$
$$([B([Q(PA)][A(PQ)])]\Big)\Big),$$

wenn mit (PA) usw. der unendlichferne Punkt von $[PA]$ bezeichnet wird.

Konstruktion rationaler Funktionen von Verhältnissen.

I. **Das Negative eines gegebenen Verhältnisses** (ABC) **zu konstruieren.**

Man konstruiere X so, daß A, B, C, X harmonisch liegen, dann ist:

$$(ABX) = -(ABC).$$

II. **Das Reziproke eines gegebenen Verhältnisses** (ABC) **zu konstruieren.**

Man konstruiere X aus:

$$(ABX) = (BAC) = \frac{1}{(ABC)} \quad \text{(wegen (1))}.$$

III. **Die Ergänzung eines gegebenen Verhältnisses** (ABC) **zu 1 zu konstruieren.**

Man konstruiere X aus:

$$(ABX) = (ACB) = 1 - (ABC) \quad \text{(wegen (1))}.$$

IV. **Den Quotienten der Verhältnisse** (ABC) **und** (ABE) **zu konstruieren.**

Man konstruiere X aus:

$$(ABCE) = (ABXU),$$

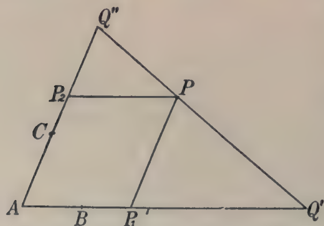
wo U der unendlich ferne Punkt der Geraden $[AB]$ ist; dann ist: (ABX) der gesuchte Quotient.

V. Das **Produkt zweier Verhältnisse** wird nach IV. und II. konstruiert.

VI. Die **Differenz zweier Verhältnisse** wird nach IV., III. und V. konstruiert.

VII. Die **Summe zweier Verhältnisse** wird nach VI. und I. konstruiert.

Also kann man durch bloßes Verbinden, Schneiden und Parallelеziehen jede rationale Funktion von Verhältnissen als Verhältnis konstruieren.



Um die Umkehrung dieses Satzes zu beweisen, führen wir affine oder Verhältniskoordinaten ein. Da mindestens drei nicht in einer Geraden liegende Punkte gegeben sein müssen, legen wir drei solcher Punkte A, B und C dem Koordinatensystem zugrunde. Dann sind die Koordinaten eines beliebigen Punktes P die Verhältnisse:

$$\left.\begin{array}{l} x = (P_1 B A), \\ y = (P_2 C A) \end{array}\right\} \text{wo } PP_2 \parallel AB \text{ und } PP_1 \parallel AC \text{ gezogen sind,}$$

und die Koordinaten einer beliebigen Geraden $[Q'Q'']$ die Verhältnisse:

$$\xi = -(BQ'A),$$
$$\eta = -(CQ''A).$$

Die Bedingung dafür, daß der Punkt x, y auf der Geraden ξ, η liegt, lautet:

$$x\xi + y\eta + 1 = 0,$$

denn diese Gleichung wird in der Tat nach Einsetzen der Koordinaten die folgende:

$$\frac{P_1 A}{Q' A} + \frac{P_2 A}{Q'' A} = 1,$$

und diese ist richtig, weil $\frac{P_1 A}{Q' A} = \frac{P Q''}{Q' Q''}$ und $\frac{P_2 A}{Q'' A} = \frac{P Q'}{Q'' Q'}$ ist.

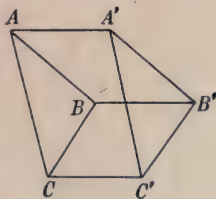
Wie bei den projektiven linearen Konstruktionen lassen sich nunmehr die weiteren Schlüsse vollenden, so daß wir den Satz aussprechen können: *„Durch affine lineare Konstruktionen werden alle und nur die Verhältnisse konstruierbar, welche rational von den gegebenen abhängen (affin lineares Netz).“*

Streckenaddition.

Definition: „Zwei Strecken heißen gleich, $AB = A'B'$, wenn $AB \parallel A'B'$ und $AA' \parallel BB'$ ist“.

Diese Art Streckengleichheit erfordert also lediglich den Begriff „Parallelität“.

Die Definition ist zulässig, weil offenbar der Satz gilt: „Sind zwei Strecken AA', BB' einer dritten CC' gleich, so sind sie einander gleich“. Das ist nichts anderes als der in doppelter Weise affin spezialisierte Desarguesche Satz.



Man kann von jedem Punkte aus eine und nur eine Strecke abtragen, die einer gegebenen Strecke gleich und mit ihr gleichen Sinnes ist, und zwar durch bloße affine lineare Konstruktion. Infolgedessen läßt sich auch jede Strecke vervielfachen und in eine gegebene Anzahl gleicher Teile teilen.

Definition: „Unter der Summe zweier Strecken versteht man die Diagonale des Parallelogramms, dessen Seiten den beiden gegebenen Strecken gleich sind“.

Diese Definition ist zulässig, da offenbar gleiche Summanden

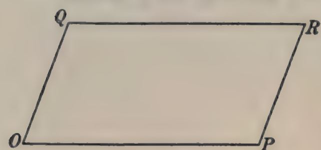
$a = a'$, $b = b'$ gleiche Summen $a + a' = b + b'$ ergeben. Auch befolgt diese Addition das kommutative[1]) und das assoziative[2]) Gesetz:

$$a + b = b + a, \quad a + (b + c) = (a + b) + c,$$

wie fast unmittelbar zu sehen ist.

Die Konstruktionen, die sich aus den projektiven linearen durch Hinzunahme der Streckenaddition ergeben, sind identisch mit den affinen linearen Konstruktionen.

Denn wird erstens die Streckenaddition als möglich vorausgesetzt, und soll durch P zu $[QR]$ die Parallele gezogen werden, so ist O derart zu finden, daß

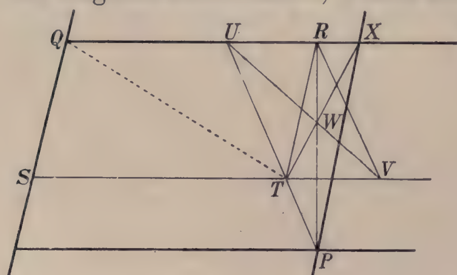


$$RO = RP + RQ$$

ist; dann ist PQ die gesuchte Parallele zu QR.

Zweitens zeigen wir, daß die durch Paralleleziehen entstehenden Schnittpunkte durch bloße Streckenaddition gefunden werden können.

Ist nämlich X der Schnittpunkt der Geraden $[QR]$ mit der durch P gezogenen Parallelen zu $[QS]$, so ergibt sich X auch durch die folgende Konstruktion, welche außer dem Verbinden und Schneiden nur die Streckenaddition voraussetzt:



$$QT = QR + QS,$$
$$U = ([PT], [QR]),$$
$$UV = UR + UT,$$
$$W = ([UV], [PR]),$$
$$X = ([QR], [TW]).$$

Affine Begriffe und Sätze und affin lineare Aufgaben.

Der affine Satz des Ceva lautet: Das Produkt der drei Schnittverhältnisse $(BCA')(CAB')(ABC')$, welche die drei Ecktransversalen eines Punktes D auf den drei Dreiecksseiten bestimmen, ist gleich minus Eins[3]); zum Beweise multipliziere man $(BCA') = BAD : CAD$[4]) mit den zwei analogen Identitäten. Der früher benutzte projektive Satz ergibt sich aus diesem durch Dividieren der Identitäten für D und P. Rückt D in den Schwerpunkt, wird also

1) Eingeführt von Servois, Gergonnes Ann. V (1814), p. 93.

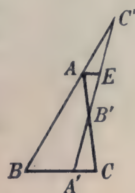
2) Wohl zuerst von Sir W. R. Hamilton eingeführt (vgl. H. Hankel, Vorlesungen über die komplexen Zahlen und ihre Funktionen. Teil I, Leipzig 1867, p. 3).

3) Desargues l. c. I, p. 215ff., 291ff. De la Hire l. c. lib. II, prop. 6, 10 usw.

4) Dabei ist den Dreiecksinhalten BAD usw. ein bestimmtes Vorzeichen beizulegen, je nachdem der durch die Folge B, A, D gegebene Drehungssinn mit einem in der Ebene festgesetzten übereinstimmt oder nicht (vgl. Möbius l. c., § 17).

$$BA' = A'C,\ CB' = B'A,\ AC' = C'B,$$

so erhält man aus dem projektiven den affinen. — Der affine Satz des Menelaus lautet: $(BCA')(CAB')(ABC') = 1$, wenn A', B', C' auf einer Geraden liegen. In der Tat sind diese Verhältnisse für $[AE] \parallel [BC]$ der Reihe nach gleich $\frac{BA'}{CA'}, \frac{CA'}{AE}, \frac{AE}{BA'}$. Aus dem affinen erhält man wie oben den projektiven; und der affine ist derjenige Spezialfall des projektiven, in dem eine Gerade die unendlich ferne ist.



Für die Kegelschnitte ergibt sich nach ihren Schnittpunkten mit der unendlich fernen Geraden die Unterscheidung in Hyperbel (reelle getrennte Schnittpunkte), Parabel (reelle vereinte), Ellipse (konjugiert imaginäre). Die Tangenten in den unendlich fernen Punkten, reell bei der Hyperbel, imaginär bei der Ellipse, heißen „Asymptoten", „Zentrale" heißt die Polare eines unendlichfernen Punktes, „Mittelpunkt" der Pol der unendlich fernen Geraden. Von zwei konjugierten Zentralen halbiert jede die der anderen parallelen Sehnen und geht jede durch die Berührpunkte der der andern parallelen Tangenten. Die Paare konjugierter Zentralen bilden eine Involution, deren (reelle oder imaginäre) Doppelstrahlen die Asymptoten sind. Die Sehne auf einer Zentrale heißt Durchmesser. Der unendlich ferne Punkt der Parabel heißt ihre „Achsenrichtung".

Aufgaben: Von einer Parabel sind vier Tangenten, oder drei Tangenten und auf einer der Berührpunkt, oder zwei Tangenten mit ihren Berührpunkten gegeben; von einer Hyperbel sind eine Asymptote und noch drei Punkte, oder noch drei Tangenten, oder noch zwei Punkte und die Tangente in einem, oder noch zwei Tangenten und der Berührpunkt auf einer gegeben, von einem Kegelschnitt sind die Asymptoten und noch ein Punkt oder noch eine Tangente gegeben, von einer Parabel ist die Achsenrichtung und noch drei Punkte oder noch drei Tangenten oder noch zwei Tangenten und auf einer der Berührpunkt oder noch zwei Punkte und in einem die Tangente gegeben, von einer Hyperbel ist eine Asymptotenrichtung und noch vier Punkte oder usw. gegeben, von einem Kegelschnitt sind die zwei Asymptoten-*richtungen* und noch drei Punkte oder usw. gegeben, von einem Kegelschnitt sind eine Asymptote und die Richtung der andern und noch zwei Punkte usw. gegeben, weitere Punkte und Tangenten und eventl. die Asymptoten, die Zentrale zu einer gegebenen Richtung und die konjugierte Zentrale, bei einer Parabel die Achsenrichtung zu konstruieren. Ebenso wenn von einem Kegelschnitt eine Zentrale und noch vier Tangenten (oder usw.) gegeben sind[1], oder der Mittelpunkt

1) Daß es in der Tat (im allgemeinen) nur einen gibt, folgt aus dem Newtonschen Satz, s. S. 31, Anm. 2.

und noch drei Punkte (oder usw.). Entsprechende Aufgaben für den letzten Schnittpunkt (die letzte Tangente) zweier Kegelschnitte, wenn sich unter den gegebenen Elementen affine, z. B. Asymptoten, Asymptotenrichtungen, Achsenrichtungen, Zentralen, Mittelpunkte befinden.

Konstruktion von oskulierenden Kegelschnitten, von denen weitere, darunter affine Elemente gegeben sind.

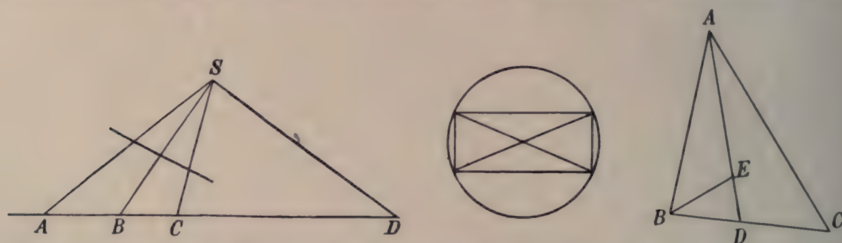
Kapitel III.

Metrische lineare Konstruktionen.

Zu den Konstruktionen des Verbindens und Schneidens nehmen wir das Lotfällen hinzu; damit ist zugleich das Paralleleziehen gegeben. Umgekehrt kann man aber keinen rechten Winkel konstruieren, auch wenn zwei Paare paralleler Geraden gegeben sind, da jede affine Konstruktion durch Parallelprojektion nicht verändert wird, während ein rechter Winkel dabei im allgemeinen in einen schiefen übergeht.

Ist *ein* rechter Winkel und zwei Paar Parallele gegeben, so kann man nur rechte Winkel konstruieren, deren Schenkel zu denen des gegebenen parallel liegen, wie ebenfalls durch Parallelprojektion erhellt. Für den Fall, daß *zwei* rechte Winkel gegeben sind, schicken wir einige Hilfssätze voraus.

In bezug auf harmonische Strahlen ist jetzt hervorzuheben, daß die beiden Halbierungsstrahlen eines Winkels mit dessen Schenkeln harmonisch liegen, da eine Parallele zum einen von dem andern und



den Schenkeln in einer halbierten Strecke geschnitten wird (s. Fig.). Wir brauchen ferner den Satz des Thales[1]), daß zwei Kreisdurchmesser Diagonalen eines Rechtecks sind, sowie den Satz (Euklid), daß aus (s. Fig.)

$$\angle BAD = \angle DAC$$

folgt $AB : AC = DB : DC$; das ergibt sich sofort aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $ABE \sim ACD$, wenn man $BE = BD$ macht. Aus

1) Thales von Milet (um 600 v. Chr.), s. Proklos.

diesen Sätzen folgern wir zunächst den Satz des Apollonius: Die Punkte konstanten Abstandsverhältnisses von zwei festen Punkten A, B liegen auf einem Kreise, von dem ein Durchmesser durch A und B harmonisch geteilt wird. Und auf Grund dieses Satzes und des Satzes von Menelaus beweisen wir nunmehr den Satz von Bodenmiller[1]): Die drei Kreise über den Diagonalen AA', BB', CC' eines voll-



ständigen Vierseits als Durchmesser schneiden sich in denselben zwei Punkten. Ist nämlich O ein Schnittpunkt der über AA' und BB' als Durchmesser beschriebenen Kreise, so ist

$$\frac{OF}{OG} = \frac{OF}{OH} \cdot \frac{OH}{OG} = \frac{BF}{BH} \cdot \frac{AH}{AG} = \frac{CF}{CG},$$

also liegt O auch auf dem Kreise mit CC' als Durchmesser. Dabei wurde der Satz des Menelaus auf die Transversale $[ABC]$ des Dreiecks FGH angewandt.

Jetzt sind wir imstande, wenn *zwei* Paare Senkrechter $\mathfrak{A} \perp \mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B} \perp \mathfrak{B}'$ eines Punktes O gegeben sind, auf jeder Geraden $\mathfrak{C}$ von O die Senkrechte $\mathfrak{C}'$ in O mit dem Lineal allein zu konstruieren. Zu dem Zwecke schneiden wir die Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ durch zwei beliebige Gerade eines beliebigen Punktes C von $\mathfrak{C}$ in den Punkten A, B, A', B', dann ist $C' = ([AB'][A'B])$ ein Punkt der gesuchten Senkrechten $\mathfrak{C}'$.

Wird noch durch zwei gegebene Parallelenpaare das Parallelenziehen ermöglicht, so kann man in *jedem* Punkte *jeder* Geraden das

1) Von Gudermann (Analytische Sphärik, Köln 1830, p. 138) als Bodenmillers Satz mitgeteilt. Siehe auch: Questions proposées, Gerg. Ann. XI (1820/21), p. 132. Der obige Beweis ist von Möbius (Leipz. Ber. VI, 1854, p. 87ff. = Werke II, p. 237ff.). Aus diesem Satze folgt der von Gauß (Monatl. Korr. f. Erd- u. Himmelskunde, Bd. 22, 1810 = Werke IV, Göttingen 1880, p. 385ff.), daß die Mittelpunkte von AA', BB', CC' auf einer Geraden liegen, ein von Newton nicht bemerkter Spezialfall seines Satzes, die Mittelpunkte der einem Vierseit einbeschriebenen Kegelschnitte (einer Kegelschnittschar) liegen auf einer Geraden (Principia I, lemma 25, corr. 3), von dem sich später ein Beweis ergeben wird.

Lot errichten und von *jedem* Punkte auf *jede* Gerade das Lot fällen. Dabei können die zwei gegebenen Rechten beliebig in der Ebene liegen, sie dürfen nur nicht parallel sein.

In Hinblick auf den Involutionssatz beim Vierseit (s. S. 7) können wir den Bodenmillerschen Satz so aussprechen: Drei Paare Senkrechter eines Punktes sind in Involution. Eine solche Involution heißt „zirkular“. Andererseits sind konjugierte Kreisdurchmesser zueinander senkrecht, denn jeder halbiert die dem andern parallelen Sehnen. Also sind die (imaginären) Doppelstrahlen einer zirkularen Involution im Punkte O die Asymptoten aller Kreise mit O als Mittelpunkt. Alle zirkularen Involutionen sind „parallel“, demnach haben auch alle Kreisasymptoten dieselben Richtungen; diese zwei imaginären Richtungen oder diese zwei unendlich fernen imaginären Punkte, durch die alle Kreise hindurchgehen, heißen die *Kreispunkte* der Ebene. Senkrechte Richtungen sind also solche, welche harmonisch zu den Kreispunkten sind, und durch zwei Paare senkrechter Richtungen werden die Kreispunkte als gemeinsames harmonisches Paar indirekt gegeben. Die Konstruktion der senkrechten zu einer gegebenen Richtung ist nichts anderes, als die Konstruktion der vierten harmonischen, wenn ein Paar indirekt, nämlich als gemeinsames harmonisches zweier Paare gegeben ist.

Die hier gegebene Begründung der Theorie der Kreispunkte ist unabhängig von der Theorie der Kegelschnitte, da die dabei benutzten Polareneigenschaften sich auch direkt aus dem Satze des Apollonius ergeben. Kommt es nicht auf eine solche unabhängige Begründung an, so folgt natürlich aus der Involution der konjugierten Durchmesser der Satz, daß aus $AOA' = BOB' = 1$ Rechten auch $COC' = 1$ Rechten folgt usw.[1])

Nunmehr sind diejenigen Punkte und Geraden zu charakterisieren, welche sich durch metrisch lineare Konstruktion aus gegebenen Punkten und Geraden ergeben (das metrisch-lineare Netz). Dazu führen wir *metrische Verhältniskoordinaten* ein. Da mindestens drei nicht in einer Geraden liegende Punkte gegeben sein müssen, nehmen wir drei solcher Punkte A, B, C und das von B auf AC gefällte Lot BO, und definieren

1) Dies ist der Beweis des Bodenmillerschen Satzes von Chasles (Géometrie supérieure, 2. Aufl., Chap. XVIII, art. 345).

$$x = \frac{OP_1}{OA}, \quad y = \frac{OP_2}{OB}$$

als Koordinaten eines beliebigen Punktes P,

$$\xi = -\frac{OA}{OQ'}, \quad \eta = -\frac{OB}{OQ''}$$

als Koordinaten einer beliebigen Geraden $[Q'Q'']$.

Man kann annehmen, daß die zwei gegebenen rechten Winkel die Winkel AOB und ODA sind; dann ergeben sich alle Punkte, die durch metrisch lineare Konstruktion gefunden werden können, aus den gegebenen Punkten, einschließlich O und D, durch affine lineare Konstruktion. Daraus folgt, daß die metrisch linear konstruierbaren Punkte und Geraden diejenigen sind, deren Koordinaten rational von den Koordinaten der gegebenen Elemente abhängen, einschließlich

$$x_D = \frac{OD_1}{OA} = \frac{a^2}{b^2}, \quad y_D = \frac{OD_2}{OB} = \frac{b^2}{a^2},$$

wo $a = OA$, $b = OB$ ist.

Insbesondere kann das Verhältnis $\frac{b^2}{a^2}$, also auch x_D, y_D rational sein; dann ist der Punkt D bereits affin linear konstruierbar: mit dem einen rechten Winkel AOB ist der zweite ODA mit gegeben. Das steht nicht im Widerspruch mit dem obigen Resultat, denn hier sind außer dem Rechten noch auf seinen Schenkeln Strecken gegeben, deren Quadrate in rationalem Verhältnis stehen. Dieses Datum enthält also einen zweiten Rechten.

Ferner kann schon das Verhältnis $\frac{b}{a}$ rational sein. Man stellt dies fest, indem man die kleinere der beiden Strecken auf der größeren abträgt, den verbleibenden Rest auf der vorher abgetragenen Strecke und so fort nach dem bekannten Euklidischen Algorithmus. Arithmetisch drückt sich dieser Prozeß, wenn man die Reste mit $c, d, e \ldots$ und die ganzzahligen Quotienten mit $q, q', q'', \ldots$ bezeichnet, folgendermaßen aus:

$$a = q \cdot b + c \quad \text{mit} \quad 0 < c < b,$$
$$b = q' \cdot c + d \quad \text{„} \quad 0 < d < c,$$
$$c = q'' \cdot d + e \quad \text{„} \quad 0 < e < d$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Man kürzt das Verfahren ab, wenn man die Reste $c, d, \ldots$ stets *positiv oder negativ* möglichst klein nimmt, also so daß

$$|c| < \frac{|b|}{2}, \quad |d| < \frac{|c|}{2}$$

usw. ist.[1])

1) Vgl. Vahlen, Über Näherungswerte und Kettenbrüche (Crelles J. Bd. 115 (1895), p. 221).

Erhält man schließlich nach einer endlichen Anzahl von Schritten den Rest 0, so ist das Verhältnis $b:a$ rational.

Dieses Abtragen einer Strecke b auf einer dazu senkrechten a setzt jedoch eine neue Operation, das Drehen einer Strecke um einen Rechten, voraus; man kann dann offenbar Quadrate konstruieren.

Umgekehrt, wenn das rationale Verhältnis

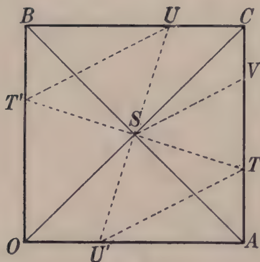
$$b:a=m:n$$

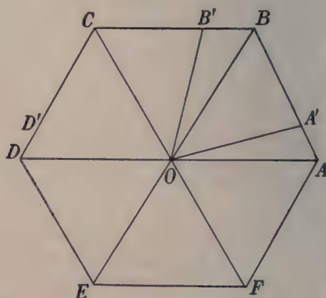
bekannt ist, so kann man die Strecke:

$$ma \text{ (auf } OA) = nb \text{ (auf } OB),$$

also ein Quadrat konstruieren. Durch die Diagonalen dieses Quadrates wird der zweite rechte Winkel geliefert.

In diesem Falle ist man imstande, jeden rechten Winkel zu halbieren. Denn sei $OABC$ das gegebene Quadrat, S der Diagonalenschnittpunkt, TSU ein dem zu halbierenden Rechten paralleler Rechter, so ist der Halbierungsstrahl SV dieses Winkels parallel zu UT' und $U'T$.





Infolgedessen kann man *jede* Strecke um einen Rechten drehen, indem man in ihren Endpunkten Lote errichtet und die entstehenden Rechten halbiert.

Man kann diese Konstruktionen auch dadurch charakterisieren, daß man sagt, es sind dabei zwei *solche* rechten Winkel mit demselben Scheitel gegeben, daß ihre Schenkel harmonisch liegen. Diesen Konstruktionen, die man als *„metrische lineare harmonische"* bezeichnen kann, stehen als *„metrische lineare äquianharmonische"* diejenigen gegenüber, bei denen nicht ein Quadrat, sondern ein gleichseitiges Dreieck, oder was auf dasselbe hinauskommt, drei Gerade eines Punktes mit den Winkeln 60^0 gegeben sind.

Dann kann man durch bloßes Paralleleziehen (der Reihe nach AB, BC, CD usw.) ein regelmäßiges Sechseck herstellen. Durch $AC \perp OB$ werden rechte Winkel geliefert. Nunmehr kann man jede Strecke, z. B. OA', um 60^0 drehen, also jeden Rechten dritteln. Man ziehe erst $A'D' \parallel AD$, dann $D'B' \parallel DB$, so ist OB' gleich der um

60^0 gedrehten Strecke OA'. Die Strecke OA' ist eine *beliebige* des Punktes A', da man zum gegebenen Punkt A' das Sechseck AB (durch A'), BC, CD usw. konstruieren kann.

Zu drei solchen Richtungen, die um 60^0 differieren, sind die Kreispunkte die äquianharmonischen.

Natürlich sind diese beiden Konstruktionsbereiche voneinander verschieden; man kann mit dem Lineal kein Quadrat konstruieren, wenn ein Rhombus mit dem Winkel von 60^0 gegeben ist und umgekehrt; denn $\sqrt{3}$ läßt sich nicht rational ausdrücken.

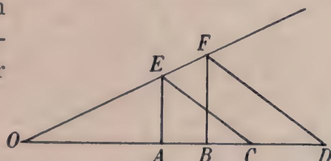
Im allgemeinen Falle, wo $\frac{b}{a}$ eine unbestimmte Irrationalität ist, kann durch bloßes Lotefällen und Paralleleziehen ein rechter Winkel nicht halbiert oder gedrittelt oder eine Strecke nicht um einen Quadranten oder Sextanten gedreht werden.

Durch die Einführung des Lotefällens tritt in bezug auf die Koordinaten keine wesentliche Neuerung ein, außer der, daß man die Achsen nunmehr senkrecht zueinander annehmen kann. Wird ein Quadrat gegeben, so werden Strecken auf den beiden Achsen untereinander vergleichbar, man kann sie mit *derselben Einheit messen.* Derart gewählte *metrische Strecken*koordinaten heißen *Cartesische.*[1])

Streckenmultiplikation und -division.

Bei Strecken a, b, c auf parallelen oder, was auf dasselbe hinauskommt, auf derselben Geraden wird das Produkt zweier Strecken durch $\frac{ab}{c}$, der Quotient durch $\frac{b}{a}c$ wieder als Strecke erklärt, wobei c die willkürlich anzunehmende Einheitsstrecke ist. Demnach handelt es sich in beiden Fällen um die Konstruktion der vierten Proportionalen OD zu drei gegebenen Strecken OA, OB, OC auf einer Geraden. Sie erfolgt durch

$$AE \parallel BF,\ FD \parallel EC.$$



Bei nicht parallelen Strecken wird die vierte Proportionale OD zu den drei gegebenen Strecken OA, OB, OC durch die Ähnlichkeit der beiden Dreiecke OAB und OCD definiert.

Hieraus ergibt sich insbesondere die Konstruktion der vierten Proportionalen: $x = \frac{bc}{a}$, wenn x mit c auf einer Geraden $\mathfrak{G}$ liegen soll und b mit a auf einer dazu senkrecht Geraden $\mathfrak{H}$ gegeben wird:

$$\Delta\, Oac \sim \Delta\, Obx$$

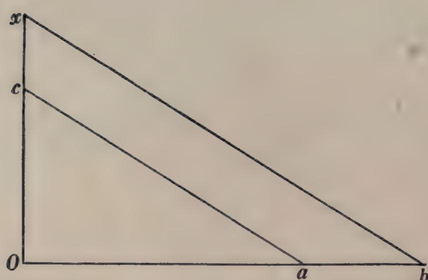
1) Descartes, Geometria. Nouv. éd. Paris 1886.

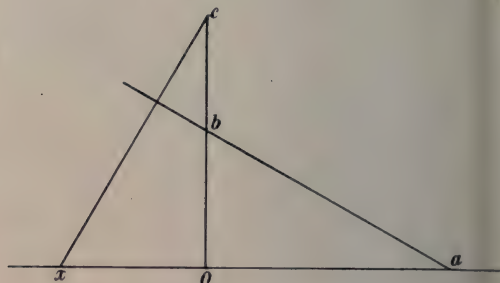
oder $x = \frac{bc}{a}$, wenn x mit a und b mit c auf zueinander senkrechten Geraden liegen sollen. In diesem Falle fälle man von c auf ab das Lot, welches Oa in x schneide, dann ist:

$$\Delta aOb \sim \Delta cOx,$$

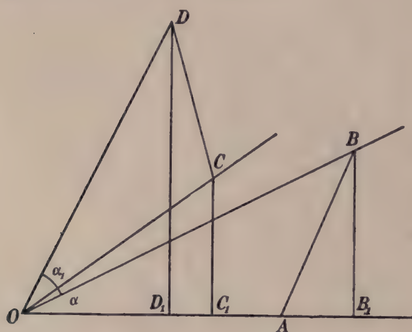
also:

$$x : c = b : a, \quad x = \frac{bc}{a}.$$





Hieraus folgt nun auch, daß bei drei beliebig gegebenen nicht parallelen und nicht zueinander senkrechten Strecken $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ die Konstruktion der vierten Proportionalen metrisch linear geleistet werden kann.



Setzen wir nämlich:

$$DD_1 = y_d, \quad CC_1 = y_c, \quad BB_1 = y_b,$$
$$OD_1 = x_d, \quad OC_1 = x_c, \quad OB_1 = x_b,$$
$$OA = x_a$$

und

$$\angle BOB_1 = \alpha, \ \angle COA = DOB = \alpha_1,$$

so ist:

$$y_d = d \sin(\alpha + \alpha_1) = \frac{bc}{a} \sin(\alpha + \alpha_1)$$
$$= \frac{bc}{a} \sin\alpha \cdot \cos\alpha_1 + \frac{bc}{a} \cos\alpha \sin\alpha_1,$$

also

$$y_d = \frac{y_b x_c}{x_a} + \frac{x_b y_c}{x_a};$$

und

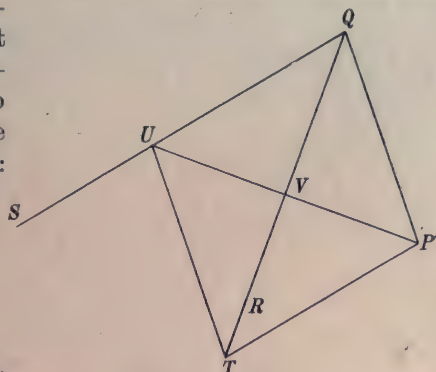
$$x_d = \frac{bc}{a} \cos(\alpha + \alpha_1) = \frac{bc}{a} \cos\alpha \cos\alpha_1 - \frac{bc}{a} \sin\alpha \sin\alpha_1,$$

also

$$x_d = \frac{x_b x_c}{x_a} - \frac{y_b y_c}{x_a}.$$

Infolgedessen lassen sich x_d und y_d und damit auch OD metrisch linear konstruieren; denn $\frac{y_b x_c}{x_a}$ und $\frac{x_b y_c}{x_a}$ lassen sich auf einer zu OA senkrechten Geraden, $\frac{x_b x_c}{x_a}$ und $\frac{y_b y_c}{x_a}$ auf OA konstruieren.

Umgekehrt läßt sich zeigen, daß die Aufgabe des Lotefällens ausführbar ist, wenn man imstande ist, die vierte Proportionale zu drei gegebenen Strecken zu konstruieren: Soll z. B. der Fußpunkt V des von P auf QR zu fällenden Lotes gefunden werden, so konstruiere man QS als die vierte Proportionale zu QR, QR und QP:



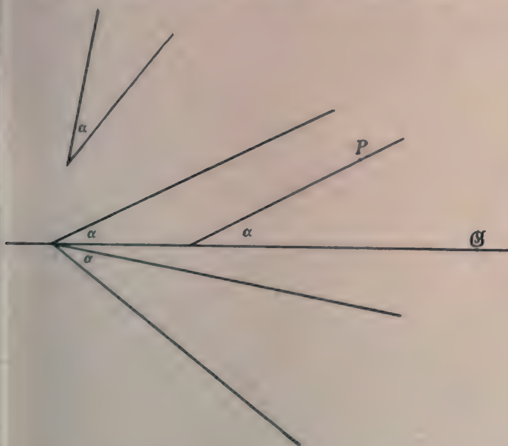
$$QS = \frac{QR \cdot QR}{QP},$$

ziehe:

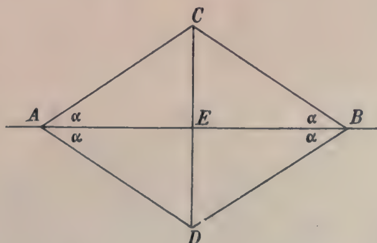
$$PT \parallel QS$$
$$TU \parallel PQ,$$

dann ist $V = ([QR][TU])$ der gesuchte Fußpunkt des von P auf QR gefällten Lotes.

Aufgabe (Winkelabtragen): Einen gegebenen Winkel an eine gegebene Gerade $\mathfrak{G}$ anzutragen, so daß der andere Schenkel durch einen gegebenen Punkt P geht. Durch bloßes Lotefällen kann man zunächst den Winkel α so zeichnen, daß sein Scheitel auf $\mathfrak{G}$ liegt, während seine Schenkel zu denen des ursprünglichen senkrecht stehen; durch Drehen, also durch Konstruktion einer vierten Proportionalen kann man es ferner erreichen, daß der eine Schenkel auf $\mathfrak{G}$ zu liegen kommt. Dann ist nur noch durch P zu dem freien Schenkel die Parallele zu ziehen. Also das „Drehen" des Winkels ist das, was das Lotefällen erfordert.



Umgekehrt läßt sich zeigen, daß man durch Winkel*abtragen* auch *rechte* Winkel konstruieren kann. Dazu braucht man nur einen Winkel α in



zwei Punkten A und B einer Geraden nach oben und unten hin abzutragen. In dem so bestimmten Rhombus $ACBD$ schneiden sich die Diagonalen bei E unter einem rechten Winkel. Es genügt also, wenn man einen *einzigen* Winkel abtragen kann, z. B. vermittelst eines

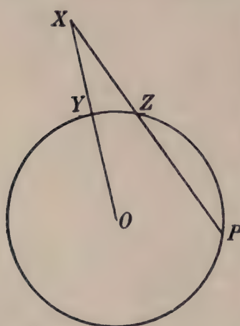
transportablen Winkels, selbst wenn das Abtragen auf ein bloßes Verdoppeln beschränkt wird.

Aber es genügt sogar, wenn man imstande ist, einen *einzigen* bestimmten Winkel nur um seinen *Scheitel* zu drehen, ja sogar, wenn dieser Winkel in bloß *drei* nicht parallelen Lagen gezeichnet vorliegt. Denn man ziehe durch einen beliebigen Punkt A zu den linken, durch einen beliebigen Punkt B zu den rechten Schenkeln der drei gegebenen Winkel Parallele, wodurch man die drei gleichen Winkel ACB, ADB, AEB erhalte. An den Kegelschnitt $ABCDE$, der in diesem Fall nach dem Satz vom Peripheriewinkel ein Kreis ist, lege man durch A den Durchmesser AA', dann sind ABA', ACA' usw. Rechte, nach dem Satz von Thales. A und B sind am einfachsten als Schnittpunkte zweier linker und zweier rechter Schenkel zu wählen.

Metrische Begriffe und Sätze und metrisch lineare Aufgaben.

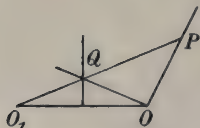
Welche Sätze erhält man durch metrische Spezialisierung aus dem Desarguesschen und aus dem Pappusschen Satze?

Die metrisch spezialisierten Kegelschnitte sind der Kreis und die gleichachsige Hyperbel; ersterer erzeugt durch zwei kongruente Strahlbüschel (Satz von der Konstanz des Peripheriewinkels), letztere erzeugt durch zwei symmetrische Strahlbüschel[1]): drehen sich $[OX]$ um O und $[PX]$ um P mit gleicher Geschwindigkeit in konträrem Sinne, so beschreibt ihr Schnitt X eine gleichachsige Hyperbel, die natürlich durch O und P geht; daß ihre Asymptoten zueinander senkrecht stehen, folgt sofort daraus, daß zwei Parallele, um einen Rechten gedreht, wieder parallel sind. Zugleich beschreiben Y und Z den Kreis $O(OP)$ gegenläufig und Z mit doppelter Geschwindigkeit wie Y, wie aus dem Satz vom Peripherie- und Zentriwinkel folgt. Wir erwähnen diese Eigenschaft, weil sie den später zu behandelnden Winkeltrisektionen von Pappus, Grégoire, Chasles zugrunde liegt.



Auch die andere projektive Erzeugung: durch *die* Punkte P, für die $P(IJKL)$ konstant ist, führt beim Kreise zu einem wichtigen Resultat. Verlegt man die Punkte I, J in die Kreispunkte, so ist

1) Auf dieser Eigenschaft beruht ein Zirkel für die rechtwinklige Hyperbel, siehe z. B. J. M. Hasius, Specimen algebrae ad artem fortificatoriam applicatae, Lipsiae 1707. Der rechte Winkel POQ dreht sich um den Scheitel O; durch den Schnittpunkt Q des einen Schenkels mit dem Mittellot von OO_1 geht ein Lineal, das den anderen Schenkel in P trifft. P beschreibt die Hyperbel.



mit $P(IJKL)$ zugleich der Peripheriewinkel $\varphi = KPL$ von P unabhängig, bloß von K, L, also bloß vom Bogen φ abhängig; wir setzen daher

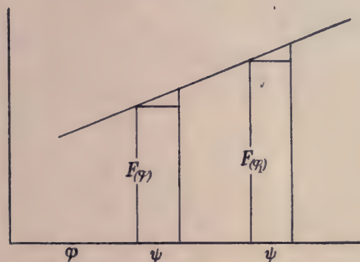
$$P(IJKL) = e^{F(\varphi)}.$$

Für die Funktion F erhält man sofort eine Funktionalgleichung aus $P(IJKL) \cdot P(IJLM) = P(IJKM)$, nämlich wenn $LPM = \psi$ gesetzt wird:

$$F(\varphi) + F(\psi) = F(\varphi + \psi),$$

also ist $F(\varphi + \psi) - F(\varphi)$ von φ unabhängig.

Stellt man die Funktion F graphisch dar, so folgt daraus, daß die Kurve $y = F(\varphi)$ bei gleichen Abszissenzuwüchsen ψ um gleiche Ordinatenunterschiede steigen (bzw. fallen) muß, d. h. die Kurve geht durch die Schiebung



$$\varphi \,\|\, \varphi + \psi$$
$$y \,\|\, y + F(\psi)$$

in sich über, eine Eigenschaft, die bekanntlich nur der Geraden zukommt; also ist $F(\varphi)$ eine *lineare* Funktion von φ.

Um sie genauer zu ermitteln, berücksichtigen wir erstens, daß für $\varphi = 0$, d. h. $K = L$ das Doppelverhältnis $P(IJKL) = 1$, also $F(\varphi) = 0$ wird: $F(\varphi)$ ist also gleich $\lambda\varphi$, worin λ eine Konstante ist. Der Wert dieser Konstanten ergibt sich, indem man zweitens K und L in die Endpunkte eines Durchmessers verlegt, dann ist einerseits $\varphi = \frac{\pi}{2}$ nach dem Satz des Thales, andrerseits $P(IJKL) = -1$, weil dies vier harmonische Strahlen sind. Folglich ist λ aus

$$e^{\lambda\frac{\pi}{2}} = -1 = e^{\pi i}\text{[1]}$$

zu bestimmen und hat demnach den Wert $\lambda = 2i$. Damit ist mit den denkbar elementarsten Mitteln das wichtige Resultat von Laguerre[2]) gewonnen:

Ein Winkel ist der durch $2i$ dividierte natürliche Logarithmus des Doppelverhältnisses, welches seine Schenkel mit den Kreispunkten bilden.

In ähnlicher Weise wird der metrische Begriff der *Strecke* auf den projektiven des Doppelverhältnisses zurückgeführt. Es seien nämlich A, B, U, V mit den Abszissen a, b, u, v vier Punkte einer Geraden. Das Doppelverhältnis:

$$(ABUV) = \frac{u-a}{u-b} : \frac{v-a}{v-b} = \frac{\left(1-\frac{a}{u}\right)\left(1-\frac{b}{v}\right)}{\left(1-\frac{b}{u}\right)\left(1-\frac{a}{v}\right)}$$

1) Siehe hierzu die Entwicklungen in Teil V, Kap. 2.

2) Laguerre, Nouv. ann. de math. 12 (1853), p. 57 = Oeuvres II (Paris 1905), p. 6.

wird für große Werte von u und v nahezu gleich

$$\left(1-\frac{a}{u}\right)\left(1-\frac{b}{v}\right)\left(1+\frac{b}{u}\right)\left(1+\frac{u}{u}\right),$$

also nahe gleich $1+(b-a)\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)$; also sein natürlicher Logarithmus nahe gleich [1])

$$(b-a)\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right)=AB\cdot\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\right);$$

daraus folgt, indem wir die Punkte U und V in den unendlich fernen Punkt von $[AB]$ verlegen:

Die Strecken einer Geraden sind proportional den natürlichen Logarithmen der Doppelverhältnisse, welche ihre Endpunkte mit dem zweimal zu nehmenden unendlich fernen Punkt der Geraden bilden.

Da der Kreis durch *kongruente* Strahlbüschel erzeugt wird, so sind seine Asymptoten, also die Kreispunkte auch als Doppelstrahlen einer solchen „zirkularen“ Projektivität, also, wie bei jeder, durch drei Paare entsprechender Strahlen $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}'$ bestimmt, die aber hier gleiche Winkel bilden

$$\angle\,\mathfrak{A}\mathfrak{A}'=\angle\,\mathfrak{B}\mathfrak{B}'=\angle\,\mathfrak{C}\mathfrak{C}'.$$

Daraus folgt auf einem neuen Wege, der zugleich den projektiven Grund erkennen läßt, daß die metrisch linearen Konstruktionen ausführbar sind, wenn statt der zwei *rechten* Winkel drei *gleiche* Winkel gegeben sind, die man sich natürlich an einen Scheitel parallel verschoben denken kann. Denn man kann zu jedem Strahl $\mathfrak{P}$ des Büschels den konjugiert harmonischen $\mathfrak{P}'$ in bezug auf die Doppelstrahlen der Projektivität $\begin{pmatrix}\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{X}\\ \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{X}'\end{pmatrix}$, d. h. in bezug auf die Kreispunkte konstruieren; dann ist aber $\mathfrak{P}'\perp\mathfrak{P}$. Ebenso konstruiert man einen zweiten Rechten usw.

„Achsen“ eines Kegelschnitts sind konjugierte Zentralen, die zugleich aufeinander senkrecht stehen. Sie sind also sowohl harmonisch zu den Asymptoten (die ihrerseits das gemeinsame harmonische Paar zu zwei Paaren konjugierter Zentralen sind), als zu den Kreisasymptoten (definiert als gemeinsames harmonisches Paar zu zwei Paaren Senkrechter). Demnach gibt es mit Rücksicht auf S. 5 (oben) bei Mittelpunktskegelschnitten stets zwei reelle Achsen; bei der Parabel ist eine die unendlich ferne Gerade.

„Brennpunkte“ eines Kegelschnitts sind solche Punkte, in denen konjugierte Strahlen aufeinander senkrecht stehen, also eine zirkulare Involution bilden. Berücksichtigt man, daß nach S. 19 (3) sich selbst konjugierte Strahlen Tangenten sind, und daß die Doppelstrahlen einer

1) Daß um so genauer $e^{\xi}=1+\xi$, je kleiner ξ ist, ist die Fundamentaleigenschaft der Zahl e; siehe hierüber Teil V, Kap. 2.

zirkularen Involution durch die Kreispunkte gehen, so kann man die Brennpunkte auch als die Schnittpunkte der von den Kreispunkten an den Kegelschnitt gelegten Tangenten definieren.[1]) Also gibt es deren vier. Und da die Geraden, als deren Schnitte sie erklärt sind, paarweis konjugiert imaginär sind, so sind jedenfalls zwei, also auch nur zwei reell. Da ferner jeder Brennpunkt an jeder Achse gespiegelt, aus Symmetriegründen wieder einen Brennpunkt ergibt, so müssen von den vier Brennpunkten die zwei reellen auf der einen Achse, also auf Grund von Poncelets Kontinuitätsprinzip und ebenfalls aus Symmetriegründen die zwei imaginären auf der anderen Achse liegen.[2]) Die erste heißt „Hauptachse", die zweite „Nebenachse"; die Sehnen auf ihnen „Hauptdurchmesser", „Nebendurchmesser", deren Endpunkte „Hauptscheitel", „Nebenscheitel". — Bei der Parabel liegt nur ein, *also* reeller Brennpunkt im Endlichen, auf *der* Achse. Die Polaren der Brennpunkte heißen „Leitlinien".

Aufgaben: Konstruktion der Achse, des Brennpunkts, des Scheitels einer durch vier Tangenten (od. dgl.) gegebenen Parabel. Zunächst liefert der Brianchonsche Satz die Achsenrichtung, dann ergibt eine durch einen Punkt der Parabel zur Achse senkrechte Sehne als Mittellot die Achse, und deren Schnitt den Scheitel, dann eine zu einer gegebenen Tangente senkrechte Tangente einen Punkt der Leitlinie usw.

Konstruktion von Punkten, der Achsen, des anderen Brennpunktes, eines Kegelschnitts, wenn ein Brennpunkt und drei Tangenten (oder dgl.) gegeben sind.

---

1) Diese Eigenschaft der schon Apollonius (lib. III, prop. 45 ff., ed. Halley, p. 205 ff.) und Pappus (l. c. II, p. 1005 ff.) bekannten Brennpunkte fand De la Hire (l. c. p. 189) und erkannte Poncelet in ihrer fundamentalen Bedeutung (Gerg. Ann. VIII (1817/18), p. 1 ff., 68 ff., Applic. d'anal. II, p. 455 ff.).

2) Poncelet l. c.; siehe auch Bret, Gerg. Ann. VIII (1817/18), p. 317 ff.

Zweiter Teil.

Quadratische Konstruktionen.

Algebraische Einleitung.

Unter quadratischen Konstruktionen verstehen wir solche, welche algebraisch gesprochen, außer rationalen Operationen das Ausziehen von Quadratwurzeln erfordern.[1]) Infolgedessen ist es notwendig, vorweg die durch bloße rationale Operationen und Quadratwurzelausziehungen gebildeten „quadratischen Irrationalitäten" zu betrachten.[2])

Kommt in einem solchen Ausdruck nur eine Wurzel $\sqrt{R}$ vor, die nicht auszuziehen ist, so ist er von der Form $\frac{a+b\sqrt{R}}{c+d\sqrt{R}}$ oder nach Erweiterung mit $c-d\sqrt{R}$ von der Form

$$x = A + B\sqrt{R}$$

und genügt einer irreduzibeln Gleichung zweiten Grades:

$$x^2 - 2Ax + (A^2 - B^2R) = 0. \tag{1}$$

Ein solcher Ausdruck heiße von erster Stufe. Sind A, B, R, aber nicht $\sqrt{R}$ selbst von erster Stufe und $\sqrt{R_1}$ die darin vorkommende Wurzel, so heißt x von zweiter Stufe. Die Gleichung für x erhält man dann, wenn man die Gleichung (1), die von der Form

$$f(x) + g(x)\sqrt{R_1} = 0$$

ist, durch Multiplikation mit $f(x) - g(x)\sqrt{R_1}$ rational macht. Sie wird also vom vierten Grade.

Ein quadratisch irrationaler Ausdruck r^{ter} Stufe ist ein Ausdruck, in welchem r Quadratwurzeln vorkommen, von denen der Radikand einer jeden, aber nicht die Wurzel selbst, rational von den vorher-

---

1) Ebenso unter kubischen solche, welche Quadrat- und Kubikwurzeln erfordern. Diese Terminologie ist offenbar zweckmäßiger als die von F. London (Schlömilchs Ztschr. 41 (1896), p. 129) und A. Adler (Konstruktionen (Leipzig 1906), p. 250), welche unter quadratischen, kubischen, biquadratischen Aufgaben solche verstehen, die auf eine Gleichung zweiten, dritten, vierten Grades führen.

2) Vgl. hierzu Vahlen, Acta math., Bd. 21 (1897), p. 287.

gehenden abhängt. In einem solchen Ausdruck denken wir uns sämtliche Nenner rational gemacht, ferner sämtliche Wurzeln soweit wie möglich ausgezogen, z. B.:

$$\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} = 3 + \sqrt{2}\ ^{1)}$$

oder

$$\sqrt{13 + 9\sqrt{2}} = (1+\sqrt{2})\sqrt{3 + \sqrt{2}} \quad \text{u. dgl.}$$

Ferner denken wir uns die Anzahl der Wurzeln soweit wie möglich reduziert, z. B.:

$$\sqrt{A + B\sqrt{R}} + \sqrt{A - B\sqrt{R}} = \sqrt{2A + 2\sqrt{A^2 - RB^2}}.$$

Einen so behandelten Ausdruck nennen wir einen reduzierten; ein reduzierter Ausdruck r^{ter} Stufe hat genau 2^r verschiedene Werte; denn ist:

$$A + B\sqrt{R}$$

dieser Ausdruck, also A, B und R von der $(r-1)^{\text{ten}}$ Stufe und $\sqrt{R}$ die zuletzt auszuziehende Quadratwurzel, und angenommen, es wären 2 der 2^r Werte, die den 2^r Vorzeichenkombinationen der Wurzeln entsprechen, einander gleich; also z. B.:

$$A + B\sqrt{R} = A' + B'\varepsilon\sqrt{R'},$$

wo A', B', R' konjugierte Werte der Größen A, B, R sind und ε ein gewisses Vorzeichen bedeutet, so würde folgen:

$$(A - A' + B\sqrt{R})^2 = B'^2 R',$$

$$(A - A')^2 + 2(A - A')B\sqrt{R} + B^2 R = B'^2 R',$$

folglich, weil $\sqrt{R}$ sich nach Voraussetzung nicht rational durch die vorhergehenden Wurzeln ausdrücken läßt:

$$A = A', \quad B^2 R = B'^2 R',$$

was unmöglich ist, wenn der zu beweisende Satz für die Ausdrücke $(r-1)^{\text{ter}}$ Stufe vorausgesetzt wird; für die erste Stufe ist er evident. Diese 2^r Ausdrücke sind die 2^r Wurzeln einer rationalen Gleichung 2^rten Grades, die wie oben zu bilden ist.

---

1) Das erfolgt, wenn es möglich ist, nach der Formel

$$\sqrt{A + B\sqrt{R}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - RB^2}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - RB^2}}{2}}.$$

Kapitel I.

Projektive quadratische Konstruktionen.

Vorbemerkung: Auf S. 4 ergab sich, daß zwei reelle Paare (z. B. Punktpaare einer Geraden) stets ein gemeinsames harmonisches haben, das aber nicht immer reell ist. Wir wollen es auch in dem Falle, wo es imaginär ist, als durch die beiden Paare definiert ansehen, wie wir dies schon wiederholt tun mußten.

Zum Verbinden und Schneiden wird nunmehr die *quadratische Fundamentalaufgabe* hinzugenommen:

„Zu einem festen Punktepaar A, A' und jedem anderen Paar B, B' derselben Geraden das gemeinsame harmonische Paar zu finden," oder auch die Doppelpunkte der durch AA', BB' bestimmten Involution zu finden.

Die Lösbarkeit dieser Aufgabe vorausgesetzt, kann man dann auch zu zwei *beliebigen* Paaren A_1, A_1' und B_1, B_1' einer *beliebigen* Geraden das gemeinsame harmonische Paar XX' konstruieren.

Zu diesem Zwecke projiziere man von

$$S = ([A_1 A][A_1' A'])$$

die Punkte B_1 und B_1' auf $[AA']$ in B und B', konstruiere zu A, A' und B, B' das gemeinsame harmonische Paar X, X' und projiziere es von S aus auf $[A_1 A_1']$ in X_1 und X_1', so ist dies das gemeinsame harmonische Paar zu A_1, A_1' und B_1, B_1'.

Um wieder den Konstruktionsbereich, der durch Einführung dieser Aufgabe entsteht, festzustellen, zeigen wir, daß jetzt alle und nur diejenigen Doppelverhältnisse konstruierbar werden, welche quadratisch irrational von den gegebenen Doppelverhältnissen abhängen.

Zu dem Zweck lösen wir die Aufgabe, den Punkt Z bei gegebenem $ABCXY$ so zu konstruieren, daß

$$(ABCZ)^2 = (ABCX) \cdot (ABCY)$$

ist. Diese Gleichung läßt sich auch folgendermaßen schreiben:

$$(ABCX) : (ABCZ) = (ABCZ) : (ABCY);$$

d. h.:

$$(ABXZ) = (ABZY).$$

Andererseits ist:

$$(ABXY) = (ABXZ)(ABZY),$$

also:

$$(ABXY) = (ABXZ)^2.$$

Demnach ist:

$$(ABXZ) = \sqrt{(ABXY)}.$$

Man konstruiere nun das gemeinsame harmonische Paar ZZ' zu den beiden Paaren AB und XY; dann ist:

$$\frac{1+(ABXZ)}{1-(ABXZ)} = \frac{1+(ABXZ')(ABZ'Z)}{(AXBZ)}$$

$$= \frac{1-(ABXZ')}{(AXBZ)} = \frac{(AXBZ')}{(AXBZ)}$$

$$= \frac{(AXBZ)(AXZZ')}{(AXBZ)} = (AXZZ')$$

$$= (ZZ'AX) = (ZZ'AY)(ZZ'YX) = -(ZZ'AY)$$

$$= -(AYZZ') = -(AYZB)(AYBZ')$$

$$= -\frac{(AYBZ')}{(AYBZ)} = -\frac{1-(ABYZ')}{1-(ABYZ)}$$

$$= -\frac{1+(ABYZ')(ABZZ')}{1-(ABYZ)} = -\frac{1+(ABYZ)}{1-(ABYZ)}$$

$$= -\frac{1+\frac{1}{(ABZY)}}{1-\frac{1}{(ABZY)}} = \frac{1+(ABZY)}{1-(ABZY)}.$$

Also:

$$(ABXZ) = (ABZY),$$

d. h. Z ist der gesuchte Punkt.

Multipliziert man die letzte Gleichung mit

$$(ABZZ') = (ABZ'Z),$$

so erhält man:

$$(ABXZ') = (ABZ'Y),$$

d. h. auch für Z' ist:

$$(ABCZ')^2 = (ABCX)(ABCY),$$

so daß die Aufgabe die zwei Lösungen Z und Z' hat, die natürlich auch imaginär sein können.

Umgekehrt wird durch die quadratische Fundamentalaufgabe nur das Quadratwurzelziehen eingeführt. Denn ist ZZ' das gemeinsame



harmonische Paar zu AA' und BB', so werden dadurch die neuen Doppelverhältnisse

$$(AA'BZ), \quad (AA'BZ')$$

eingeführt, welche aber gleich $\pm\sqrt{(AA'BB')}$ sind, und alle weiteren „neuen" Doppelverhältnisse wie $(PQRZ)$, $(PQZZ')$ drücken sich nach S. 10 (oben) rational durch die Doppelverhältnisse $(AA'BP)$, usw. und $(AA'BZ)$, $(AA'BZ')$ aus.

Demnach können wir den Satz aussprechen: *„Durch projektive quadratische Konstruktionen werden alle und nur diejenigen Doppelverhältnisse konstruierbar, die quadratisch irrational von den gegebenen Doppelverhältnissen abhängen" (das projektiv quadratische Netz).*

Statt jener quadratischen Fundamentalaufgabe kann man z. B. die folgende („zweite" Fundamentalaufgabe) einführen: Die Doppelpunkte der Projektivität

$$(ABCX) = (A'B'C'X')$$

zu konstruieren, wo A, B, C und A', B', C' gegebene Punkte einer Geraden sind. Denn in der Tat führt diese Aufgabe durch Einführung von Koordinaten auf die quadratische Gleichung:

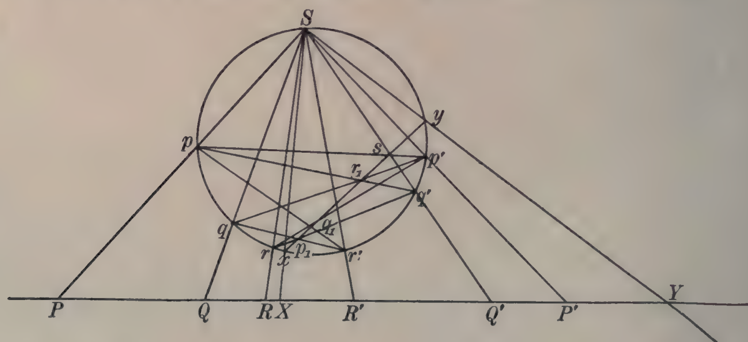
$$\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-x}{b-x} = \frac{a'-c'}{b'-c'} : \frac{a'-x}{b'-x},$$

ist also vermittelst unserer quadratischen Fundamentalaufgabe lösbar. Aber die zuerst eingeführte Fundamentalaufgabe ist die einfachere.

Umgekehrt kann die Auffindung des gemeinsamen harmonischen Paares zu zwei gegebenen Paaren AA' und BB' durch die zweite Fundamentalaufgabe bewerkstelligt werden. Denn man nehme auf der Geraden den Punkt C beliebig an, konstruiere zu $AA'BB'C$ den sechsten involutorischen C', und dann auf Grund der zweiten Fundamentalaufgabe das Doppelpunktpaar X, Y der Projektivität:

$$(ABCX) = (A'B'C'X').$$

Da diese Projektivität eine Involution ist, so ist X, Y harmonisch zu AA' und zu BB', also das gesuchte gemeinsame harmonische.



Die Fundamentalaufgabe kann nun offenbar mit dem Lineal allein nicht gelöst werden, da man mit dem Lineal, wie bewiesen, nur rationale, nicht quadratisch irrationale Ausdrücke konstruieren kann.

Es muß daher zu dem Lineal ein neues Konstruktionsmittel hinzugenommen werden. Dieses Mittel ist ein in der Konstruktionsebene *gezeichnet vorliegender Kegelschnitt.*

Um mit Hilfe desselben die Punkte X und Y entsprechend der zweiten Fundamentalaufgabe so zu konstruieren, daß:

$$(PQRX) = (P'Q'R'X) \quad \text{und} \quad (PQRY) = (P'Q'R'Y)$$

ist, projiziere man von einem Punkte S des Kegelschnittes die Punkte P, Q, R, P', Q', R' auf den Kegelschnitt in die Punkte p, q, r, p', q', r'. Ist dann:

$$p_1 = ([qr'][q'r]),$$
$$q_1 = ([pr'][p'r]),$$
$$r_1 = ([pq'][q'p]),$$

so schneidet die Pascalsche Gerade $[p_1 q_1 r_1]$ den Kegelschnitt in zwei Punkten x, y, die von S aus projiziert, die Punkte X und Y ergeben.

Denn es ist, wenn noch

$$s = ([pp'][q_1 r_1])$$

ist:

$$(PQRX) = S(pqrx) = p'(pqrx) = (sr_1 q_1 x)$$
$$= p(p'q'r'x) = S(pqrx) = (P'Q'R'X);$$

ebenso gilt für Y:

$$(PQRY) = (P'Q'R'Y),$$

was zu beweisen war. — Dabei ist von der projektiven Fundamentaleigenschaft der Kegelschnitte (vgl. S. 15) Gebrauch gemacht worden.

Um hieraus die Auflösung der ersten Fundamentalaufgabe zu bekommen, hat man die beiden Punkte X und Y zu konstruieren, für welche:

$$(AA'BX) = (A'AB'X)$$

ist. Denn aus:

$$(AA'XY) = (BB'XY) = -1$$

folgt:

$$(AA'BX) = (AA'XB') \quad \text{(vgl. S. 45)}$$
$$= (A'AB'X).$$

Daraus ergibt sich die folgende Konstruktion des gemeinsamen harmonischen Paares X, Y zu A, A' und B, B'.

Man projiziere von einem beliebigen Punkte S des Kegelschnitts aus die Punkte A, A', B, B' in die Punkte a, a', b, b' des Kegelschnitts und verbinde die Punkte

$$([ab][a'b']) \quad \text{und} \quad ([ab'][a'b])$$

durch eine Gerade; diese schneidet den Kegelschnitt in zwei Punkten x und y, die von S aus auf die gegebene Gerade projiziert die gesuchten Punkte X, Y ergeben.

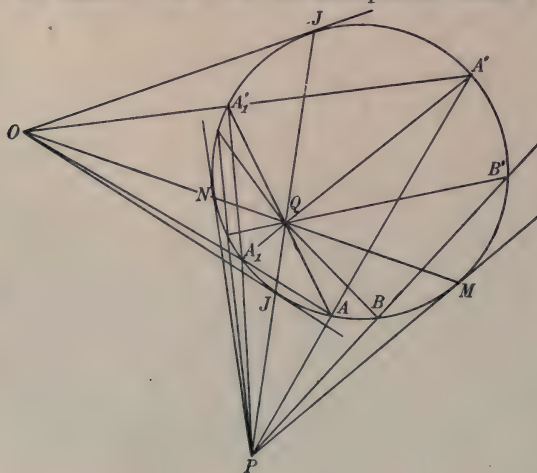
Das gemeinsame harmonische Paar zu A, A' und B, B' wird also durch die Polare des Punktes $([aa'][bb'])$ geliefert. Demnach ist dieses gemeinsame harmonische Paar auch dann zu finden, wenn das Paar BB' nicht direkt gegeben ist, sondern als das gemeinsame harmonische der Paare P, P' und Q, Q' definiert ist. Denn man findet die Gerade $[bb']$ als Polare des Punktes $([pp'][qq'])$ und dann die Gerade $[aa']$. Demnach ist diese quadratische Fundamentalaufgabe auch lösbar, wenn das eine der gegebenen Paare oder auch beide nicht explizite, sondern implizite (eventuell imaginär) als gemeinsames harmonisches von zwei gegebenen Paaren gegeben sind. Diese letzteren gegebenen Paare können ihrerseits wieder implizite gegeben sein usw.

Eine zweite Konstruktion des gemeinsamen harmonischen Paares ist die folgende: Man kann durch Projektion erreichen, daß das eine der beiden Paare auf dem Kegelschnitt liegt, das heiße U, U', das andere B, B'. Man konstruiere die Schnittpunkte P, Q der Polaren von B, und die Schnittpunkte P', Q' der Polaren von B' mit dem Kegelschnitt; dann ist $X = ([PP'][QQ'])$, $Y = ([PQ'][P'Q])$ das gemeinsame harmonische Paar. Daß X, Y auf $[BB']$ liegen, folgt durch den Pascalschen Satz aus den Sechsecken

$$PPQ'QQP' \text{ und } PP'P'QQ'Q'.$$

Daß X, Y harmonisch zu U, U' ist, folgt aus den Polareigenschaften, daß X, Y harmonisch zu B, B' ist, aus dem Harmoniesatz beim Vierseit, das die vier Tangenten $[PP]$, $[P'P']$, $[QQ]$, $[Q'Q']$ bilden, wenn man noch hinzunimmt, daß die Schnittpunkte $([PP][P'P'])$, $([QQ][Q'Q'])$ mit Y auf der Polaren von X, und die Schnittpunkte $([PP][Q'Q'])$, $([P'P'][QQ])$ mit X auf der Polaren von Y liegen.

Es ist von besonderer Bedeutung, auch den dualen Fall ins Auge zu fassen: Zu zwei Geradenpaaren eines Punktes O das gemeinsame harmonische zu finden. Man kann entsprechend wie oben annehmen, daß zwei der Geraden Tangenten des Kegelschnitts sind. Das seien $[OI]$, $[OJ]$ mit den Berührpunkten I, J. Das andere Paar sei $[OAA_1]$, $[OA'A_1']$, wo A, A', A_1, A_1' ihre Schnitte mit dem Kegelschnitt sind. Die Punkte



$$P = ([AA'][A_1A_1']),$$
$$Q = ([AA_1'][A_1A'])$$

liefern zwei Punkte der beiden gesuchten Strahlen. Denn es ist P, Q harmonisch zu I, J, als konjugierte Punkte in bezug auf den Kegelschnitt, und es ist $[OP]$, $[OQ]$ harmonisch zu $[OA]$, $[OA']$ wegen der Harmonien am Viereck $AA_1A'A_1'$.

Sind M, N die Berührpunkte der Tangenten aus P, so ist:

$$O(IJAM) = O(IJMA'), \quad O(IJAN) = O(IJNA');$$

wir wollen M und N die „Mittelpunkte" der Bogen $\widehat{AA'}$ und $\widehat{A_1A_1'}$ nennen, in bezug auf die Gerade $[IJ]$.

Ist $[BB']$ eine zweite Sekante durch P, so ist ebenso

$$O(IJBM) = O(IJMB'), \quad O(IJBN) = O(IJNB'),$$

also auch:

$$O(IJAB) = O(IJB'A').$$

Zwei solche Bögen $\widehat{AB}$ und $\widehat{B'A'}$ sollen „gleich" heißen in bezug auf die Gerade $[IJ]$. Die Definition ist zulässig, da der Satz gilt: Sind zwei Bögen einem dritten gleich, so sind sie einander gleich. Dieser Satz ist nichts anderes als der Pascalsche und $[IJ]$ die zugehörige Pascalsche Gerade.

Das Aufsuchen des gemeinsamen harmonischen Paares zu zwei gegebenen ist daher gleichbedeutend dem Bogenhalbieren in projektiver Verallgemeinerung.

Der Kegelschnitt braucht nicht vollständig, sondern nur durch ein beliebig kleines Stück gegeben zu sein. Um das zu zeigen, wähle man eine den Kegelschnitt nicht schneidende Gerade AB beliebig, ferner sei AO die Polare zu B, BO die Polare von A; F und G seien Punkte des Kegelschnitts auf OA und OB, D der Schnittpunkt von AG und BF.

Unter Zugrundelegung der Koordinatenachsen OA, OB und des Einheitspunktes D muß die Gleichung des Kegelschnitts die Form haben (siehe S. 19):

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Nun sei das gegebene Stück dieses Kegelschnitts durch die beiden Gleichungen:

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$y = \frac{2t}{1+t^2}$$

und die Ungleichung:

$$t' < t < t''$$

definiert. Der gesuchte Schnittpunkt des Kegelschnitts mit der gegebenen Geraden:

$$ax + by + c = 0$$

sei:

$$x' = \alpha + \beta\sqrt{D},$$
$$y' = \gamma + \delta\sqrt{D}.$$

Man wähle die konstruierbaren Doppelverhältnisse λ und μ beliebig, aber so, daß der Wert

$$t_1 = \lambda + \mu\sqrt{D}$$

im Intervall von t' bis t'' liegt, und es werden:

$$x_1 = \alpha_1 + \beta_1\sqrt{D},$$
$$y_1 = \gamma_1 + \delta_1\sqrt{D}$$

die Koordinaten des zum Werte t_1 des Parameters t gehörigen Punktes des Kegelschnitts.

Dann ist:

$$\delta_1 x - \beta_1 y = (\alpha_1\delta_1 - \gamma_1\beta_1)$$

eine konstruierbare Gerade, die aus dem gegebenen Kegelschnitt*bogen* den Punkt x_1, y_1 ausschneidet, von dem der gesuchte Punkt x', y' rational, also linear konstruierbar abhängt.

Die Konstruktion kann so erfolgen: Es sei B der Pol der gegebenen Geraden, X ein Punkt in der Nähe des gegebenen Bogens, Y sein konjugierter auf $[BX]$, $B'B$ harmonisch zu XY, ferner $P'Q'$ die Schnittpunkte der Polare von B' mit dem Kegelschnitt, dann sind $P = ([XP'][YQ'])$, $Q = ([XQ'][YP'])$ die gesuchten Schnittpunkte.

Aufgaben.

Die Schnittpunkte einer Geraden $\mathfrak{L}$ mit einem durch fünf Punkte P, Q, R, S, T gegebenen Kegelschnitt zu finden. — Das gesuchte Punktepaar ist harmonisch zu dem gemeinsamen harmonischen der drei Paare:

$$(\mathfrak{L}[ST]),\ (\mathfrak{L}[QR]),$$
$$(\mathfrak{L}[SR]),\ (\mathfrak{L}[QT]),$$
$$(\mathfrak{L}[SQ]),\ (\mathfrak{L}[RT]);$$

ebenso zu dem gemeinsamen harmonischen von drei Paaren, die das Viereck $PQST$ auf $\mathfrak{L}$ liefert. Demnach ist die Aufgabe zurückgeführt auf die bereits oben S. 48 erledigte: das gemeinsame harmonische zu zwei indirekt gegebenen Paaren zu finden. Diese Lösung beruht auf dem Satze, daß die durch vier Punkte, z. B. $QRST$, gehenden Kegelschnitte (Kegelschnittbüschel), zu denen auch die Geradenpaare

$$[ST],\ [QR]$$
$$[SR],\ [TQ]$$
$$[SQ],\ [RT]$$

gehören, eine Gerade $\mathfrak{L}$ in den Punktepaaren einer Involution schneiden.[1])

In der Tat, sind AA' zwei konjugierte Punkte in bezug auf einen Kegelschnitt $f(x, y) = 0$ der vier Punkte und in bezug auf einen Kegelschnitt $g(x, y) = 0$ derselben vier Punkte, dann folgt aus S. 18 (2), daß A, A' auch konjugiert sind in bezug auf alle Kegelschnitte

$$f(x, y) + \lambda g(x, y) = 0;$$

dies sind alle durch die vier Punkte gehenden Kegelschnitte, da man λ immer so wählen kann, daß $f + \lambda g = 0$ durch einen beliebigen fünften Punkt geht.

Die Konstruktion ist auch auf folgendem Wege möglich: Man projiziere P, Q, R von S aus in die Punkte A, B, C auf $\mathfrak{L}$, von T aus in die Punkte A', B', C' auf $\mathfrak{L}$ und konstruiere die Doppelpunkte der Projektivität $(ABCX) = (A'B'C'X')$.

Ebenso sind die Tangenten von einem Punkte aus an einen durch fünf Tangenten gegebenen Kegelschnitt zu konstruieren.

Durch vier Tangenten und einen Punkt oder durch vier Punkte und eine Tangente ist ein Kegelschnitt zweideutig bestimmt, also weitere Elemente desselben projektiv quadratisch konstruierbar. Sind nämlich P, Q, R, S die vier gegebenen Punkte, L die gegebene Tangente, ferner AA', BB', CC' die sechs Schnittpunkte von L mit den Seiten des Vierecks $PQRS$, so sind nach dem oben angeführten Satze die beiden Berührungspunkte X, Y der zwei Kegelschnitte das gemeinsame harmonische Paar zu den drei Paaren AA', BB', CC'.

Durch drei Punkte und zwei Tangenten oder durch drei Tangenten und zwei Punkte ist ein Kegelschnitt vierdeutig bestimmt, aber die Gleichung vierten Grades, von der diese Bestimmung abhängt, ist durch Quadratwurzeln lösbar, folglich sind weitere Elemente eines solchen Kegelschnitts ebenfalls projektiv quadratisch konstruierbar.

Man erkennt dies am einfachsten, indem man den Fall betrachtet, daß die zwei gegebenen Punkte die Kreispunkte sind; an drei Tangenten gibt es in der Tat vier Kreise, die aber quadratisch konstruierbar sind. Damit ist Grad und Charakter der algebraischen Gleichung des Problems für diesen Fall erkannt, und das Ergebnis kann ohne

1) **Sturm**, Gerg. Ann. 17 (1826), p. 173. Der besondere oben benutzte Fall stammt von Pascal (Essai pour les coniques, Oeuvres IV, p. 5). Einen noch spezielleren Fall dieses „Desarguesschen Involutionssatzes" benutzt Pappus (l. c. p. 873) zur Konstruktion eines Kegelschnitts aus fünf Punkten.

weiteres nach Poncelets Prinzip[1]) der Kontinuität, das schon Monge[2]) stillschweigend benutzte, auf den allgemeineren Fall übertragen werden. Das Entsprechende ergibt sich für den dualen Fall (drei Punkte, zwei Tangenten) durch Gergonnes Prinzip der Dualität.[3])

Wenn von den vier Schnittpunkten zweier Kegelschnitte zwei und außerdem von jedem Kegelschnitt noch drei Elemente gegeben sind, dann die übrigen zwei Schnittpunkte und die vier gemeinsamen Tangenten zu konstruieren. — Dazu dual entsprechend: Wenn von den vier Tangenten zweier Kegelschnitte zwei und außerdem von jedem Kegelschnitt noch drei Elemente gegeben sind, dann die zwei übrigen Tangenten und die vier Schnittpunkte zu finden.

Aufgabe von Castillon[4]): Ein n-Eck einem Kegelschnitt ein (bzw. um)zubeschreiben und einem gegebenen n-Eck um- (bzw. ein)zubeschreiben.

Aufgabe von Steiner[5]): Ein n-Eck einem gegebenen n-Eck um- und einem gegebenen n-Seit einzubeschreiben.

---

1) Bull. de Ferussac 9 (1828), p. 225. Traité II, p. 359. Crelles J. IV (1829), p. 1.

2) Géométrie descriptive (Paris 1799), vgl. H. Hankel, Die Elemente der projektivischen Geometrie in synthetischer Behandlung (Leipzig 1875), p. 9.

3) Gerg. Ann. 15, 16, 17 (1824—27). Über die Geschichte dieses Prinzips siehe E. Kötter, l. c. p. 160ff.

4) Diese berühmte Aufgabe findet sich für einen Kreis und $n = 3$ in gerader Linie gegebenen Punkten schon bei Pappus. Die letztere Beschränkung hob 1742 Cramer auf, und Castillon (Nouv. mém., Berlin 1776, p. 265ff.) löst die Aufgabe als erster; im selben Band steht die Lösung von Lagrange, und 1780 erscheinen in den Petersburger Acta Acad. Sc. I, p. 91, 97, II, p. 70 die Lösungen von Euler, Fuß, Lexell. In der Ausdehnung auf n Punkte lösten sie 1788 A. Giordano aus Ottajano und Malfatti (Memoire mat.-fis. della Società Italiana delle scienze IV, 1788), ferner 1796 L'Huilier (Nouv. mém., Berlin 1796 (publié 1799), p. 94ff.). Siehe auch Klügels Mathematisches Wörterbuch, III. Art. Kreis, § 105, S. 155. Carnot, Géométrie de position, 1803, p. 383ff., L'Huilier, Éléments d'analyse géometrique et d'analyse algébrique appliquées à la recherche des lieux géométriques, Paris und Genf 1809. Gergonne, Encontre, Servois, Rochat, Brianchon, Poncelet, L'Huilier in Gerg. Annales de Math. I (1810, 1811), VII (1816, 1817), VIII (1817, 1818), XIV (1823, 1824), Journal de l'école polytechnique X (1810), p. 1. Steiner, Geom. Konst., Anhang, Aufgabe 21 (Werke I, p. 519). Seydewitz, Grunerts Archiv, Bd. 4 (1844), p. 421ff.

5) Die geom. Konstr., § 20, 1 = Werke I, p. 511.

Kapitel II.

Affine quadratische Konstruktionen.

Als gegebene Konstruktionselemente sind zugrunde zu legen zwei Paare Paralleler und ein gezeichnet vorliegender Kegelschnitt. Durch Paralleleziehen ist der Kegelschnittsmittelpunkt konstruierbar. Umgekehrt kann statt der Parallelen der Mittelpunkt des Kegelschnitts gegeben werden; denn damit sind auch halbierte Strecken, nämlich die durch den Mittelpunkt gehenden Durchmesser gegeben.

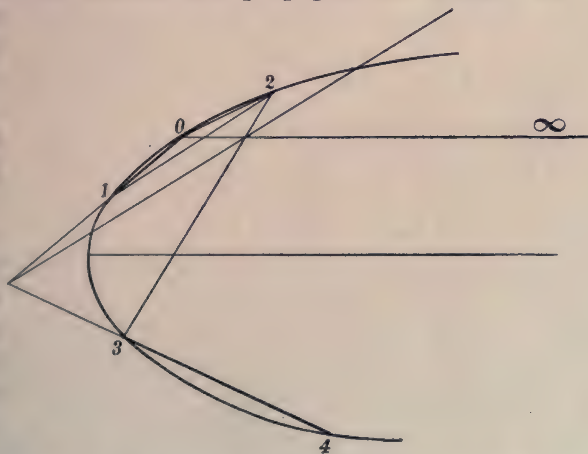
Ferner genügt es, wenn nur *ein Durchmesser* und außerdem *ein* Paar paralleler, aber nicht zum konjugierten Durchmesser paralleler Geraden gegeben wird. Denn diese liefern parallele Sehnen, die man halbieren kann, und die Mittelpunkte ergeben einen zweiten Durchmesser. Andrerseits wird durch *ein* Paar Paralleler nur *ein* Durchmesser, also nicht der Mittelpunkt, und wenn *kein* Parallelenpaar gegeben ist, *kein* Durchmesser konstruierbar; das folgt wie in S. 23, 24 durch Annahme solcher Konstruktionen und geeigneter Zentralprojektion.

Insbesondere kann der gegebene Kegelschnitt eine Parabel sein, dann muß statt des Mittelpunktes ein Durchmesser gegeben sein.

Ist nämlich $[0\infty]$ der gegebene Durchmesser und 0, 1, 2, 3, 4 Punkte der Parabel, so ist:

$$\Big[([01][34])([0\infty][23])\Big]$$

eine Pascalsche Gerade; ihr Schnitt mit $[12]$ gibt den Punkt, der mit 4 und ∞ auf einer Geraden liegt, so daß man zu $[0\infty]$ eine Parallele erhält. Konstruiert man dann in 0 und 4 die Tangenten und zieht durch deren Schnittpunkt die Parallele zu $[0\infty]$, so wird durch diese die Sehne 04 halbiert. Demnach kann man auch in der Richtung $[04]$ Parallele ziehen, also in jeder beliebigen Richtung.



Nunmehr ist zu zeigen, daß durch die affin quadratischen Konstruktionen alle und nur diejenigen Verhältnisse konstruierbar werden, welche quadratisch irrational von den gegebenen abhängen (affin quadratisches Netz).

Die beiden Punkte X und X', für welche:

$$(AA'X) = \sqrt{(AA'B)}$$

ist, ergeben sich wie folgt:

Man projiziere von einem beliebigen Punkte S des Kegelschnitts aus die Punkte A, A', B' und den unendlich fernen Punkt B dieser Geraden in die Punkte a, a', b', b des Kegelschnitts und verfahre mit diesen wie oben.

Aufgaben: Von einer durch vier Punkte gegebenen Parabel weitere Punkte zu konstruieren.

Die Asymptoten eines durch fünf Elemente gegebenen Kegelschnitts zu konstruieren. — Man findet sie als gemeinsames harmonisches Paar zu zwei Paaren konjugierter Durchmesser (s. S. 59).

Kapitel III.

Metrische quadratische Konstruktionen.

Bei diesen Konstruktionen wird das Paralleleziehen, Lotefällen und Quadratwurzelausziehen als ausführbar angenommen. Zu ihrer Ausführung kann als gegeben angenommen werden: Zwei Paar Parallelen, zwei rechte Winkel und ein gezeichnet gegebener Kegelschnitt. Statt der zwei Paar Parallelen kann wie oben S. 53 auch der Mittelpunkt des Kegelschnitts gegeben werden, und die zwei rechten Winkel können wegfallen, wenn der Kegelschnitt ein Kreis ist, da ein Kreisviereck mit einem Durchmesser als Diagonale zwei rechte Winkel liefert; schließlich kann man auch von den drei Daten die zwei rechten Winkel und den Kegelschnitt durch einen Kreis ohne Mittelpunkt ersetzt annehmen, da durch die zwei Paar Parallelen der Mittelpunkt konstruierbar wird. Oder man läßt ein Paar Parallelen fort und gibt statt dessen einen Durchmesser u. dgl.

Dann läßt sich genau wie bei den affinen quadratischen Konstruktionen nachweisen, daß die konstruierbaren Verhältnisse quadratisch irrational in den gegebenen sind (metrisch quadratisches Netz).

Andere Konstruktionsmittel: Daß diese Konstruktionen mit Lineal und Zirkel lösbar sind, versteht sich von selbst, da man ja mit dem Zirkel einen einzigen Kreis zu schlagen braucht, um das erforderliche Datum zu haben.

Daß man umgekehrt mit Lineal und Zirkel nicht mehr konstruieren kann als mit dem Lineal allein, wenn ein Kreis gezeichnet vorliegt, folgt daraus, daß die Schnittpunkte von Kreisen mit Kreisen oder Geraden quadratisch irrational von den Koordinaten der Gerade und Kreise abhängen. Um es rein geometrisch direkt zu zeigen, muß

man die Schnittpunkte zweier nicht gezeichnet vorliegender Kreise oder eines solchen Kreises und einer gezeichneten Geraden mit dem Lineal allein unter Benutzung eines gezeichnet vorliegenden Kreises konstruieren.[1])

Es sei $\mathfrak{K} = M(MQ)$ der gegebene gezeichnet vorliegende Kreis, $\mathfrak{K}' = M'(M'P')$ ein nur durch Mittelpunkt M' und Peripheriepunkt P' gegebener Kreis, dessen Schnittpunkte mit der Geraden $\mathfrak{G}$ zu konstruieren sind. Man ziehe den zu $M'P'$ parallelen und gleichgerichteten Radius MP, dadurch wird der äußere Ähnlichkeitspunkt

$$A = ([PP'][MM'])$$

bestimmt. Dann ziehe man den zu MQ parallelen Radius $M'Q'$, wo Q' durch den Schnitt mit AQ bestimmt ist. Die weitere Konstruktion ist beschrieben durch:

$$B' = ([M'P']\mathfrak{G}), \quad C' = ([M'Q']\mathfrak{G}),$$
$$B = ([AB'][MP]), \quad C = ([AC'][MQ]),$$

$[BC]$ schneide $\mathfrak{K}$ in X und Y, dann sind

$$X' = ([AX]\mathfrak{G}), \quad Y' = ([AY]\mathfrak{G})$$

die gesuchten Schnittpunkte.

Es seien zweitens die Schnittpunkte von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ zu konstruieren. Sind S, T die Schnittpunkte von $\mathfrak{K}$ mit $[MM']$, $ABST$ harmonisch, $[RBR_1]$ die zu $[AB]$ senkrechte Sehne von $\mathfrak{K}$, $M'R'$ das Lot auf $[AR]$ mit dem Fußpunkt R', ferner N der Mittelpunkt von RR', $\mathfrak{G}$ das Lot von N auf $[MM']$, so ist $\mathfrak{G}$ die gemeinsame Sekante (Chordale) beider Kreise, ihre Schnittpunkte mit $\mathfrak{K}$ zugleich die mit $\mathfrak{K}'$.

Es seien drittens die Schnittpunkte zweier Kreise

$$\mathfrak{K}_1 = M_1(M_1P_1), \quad \mathfrak{K}_2 = M_2(M_2P_2)$$

zu konstruieren. Man konstruiere wie oben die Chordale $\mathfrak{G}_1$ von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_2$, die Chordale $\mathfrak{G}_2$ von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$, fälle von $(\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2)$ das Lot auf $[M_1M_2]$, so hat man damit die Chordale $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$, deren Schnittpunkte mit $\mathfrak{K}_1$ oder $\mathfrak{K}_2$ wie oben zu konstruieren sind.

Diesen Konstruktionen, bei denen der Gebrauch des Zirkels auf ein Minimum beschränkt ist, entsprechen diejenigen, wo nur der Zirkel, das Lineal gar nicht zur Anwendung kommt. Auch mit dem Zirkel allein sind alle Punkte zu finden, die man mit Zirkel

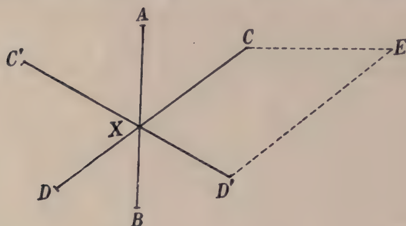
1) Poncelet, Traité I, No. 351—357. Steiner, Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt vermittels der geraden Linie und eines festen Kreises (Berlin 1833) = Werke Bd. I, p. 461. Schon Lambert behandelt ähnliche Konstruktionen, l. c. p. 171 und Cardano soll (nach Baltzer, Anal. Geom., Leipzig 1882, p. 78) das in Rede stehende allgemeine Resultat gehabt haben. Siehe auch Newton, Arithmetica universalis, p. 231.

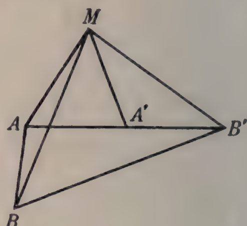
und Lineal findet. Dazu ist zu zeigen, daß man die Schnittpunkte einer durch zwei Punkte gegebenen, aber nicht gezeichneten Geraden mit einer ebenso gegebenen oder mit einem gezeichneten Kreise vermittels des Zirkels allein finden kann.[1])

Es seien erstens die Schnitte von $[AB]$ mit $M(MP)$ zu konstruieren. Man finde M_1 als zweiten Schnittpunkt von $A(AM)$ und $B(BM)$, dann sind die gesuchten Schnittpunkte die von $M_1(MP)$ mit $M(MP)$.

Es seien zweitens, was oben ausgeschlossen war, die Schnitte von $[AM]$ mit $M(MP)$ zu konstruieren. Ist Q der zweite Schnitt von $M(MP)$ mit $A(AP)$, so hat man die Bogen PQ in X und Y zu halbieren. Das sind die gesuchten Schnittpunkte. Zu dem Zweck finde man R als Schnitt von $P(PM)$ und $M(PQ)$, ebenso S als Schnitt von $Q(QM)$ und $M(PQ)$, dann T als Schnitt von $R(RQ)$ und $S(SP)$, schließlich X als Schnitt von $R(MT)$ und $S(MT)$. Ebenso findet man Y. Den einfachen Beweis überlassen wir dem Leser.

Es seien drittens der Schnittpunkt X von $[AB]$ und $[CD]$ zu konstruieren. Man finde C' aus $AC' = AC$, $BC' = BC$, ebenso D' aus $AD' = AD$, $BD' = BD$. Also ist der Schnitt von $[CD]$ und $[C'D']$ zu finden. Man konstruiere E aus $CE = DD'$, $D'E = DC$, dann ist $C'X : C'D' = C'C : C'E$, also findet man X als Schnitt von $C(CX)$, $C'(C'X)$, wenn man zu drei Strecken $C'C$, $C'D'$, $C'E$ die vierte Proportionale $CX = C'X$ konstruieren kann.





Um zu drei Strecken a, b, c die vierte Proportionale $\frac{ac}{b}$ zu konstruieren, bilde man aus (z. B.) $AA' = c$, $MA = MA' = b$ das Dreieck MAA', wähle $AB = m$ beliebig und mache die Dreiecke

$$AMB \cong A'MB'$$

aus $AB = m$, $MB = a$, $A'B' = m$, $MB' = a$, so ist $BMB' \sim AMA'$, also $a : BB' = b : c$, also $BB' = \frac{ac}{b}$ die gesuchte Größe.

1) Mascheroni, Geometria del compasso, Pavia 1797, frz. von Carette, Paris 1798, deutsch von Gruson, Berlin 1825. Hutt, Die Mascheronischen Konstruktionen, Halle 1880. Frischauf, Über die geometrischen Konstruktionen von L. Mascheroni und J. Steiner, Graz 1869.

Kürzer zu beschreiben, aber länger zu begründen ist der folgende Beweis:[1])

Durch Inversion (Abbildung durch reziproke Radien[2])) entspricht

---

1) A. Adler, Wiener Akad. Ber. XCIX, Abt. IIa (1890); Berl. Math. Ges. I (1902), p. 26.

2) Dies Prinzip wird schon von Pappus (l. c. I, p. 195) und Vieta (Apollonius Gallus, Paris 1600) und für den Raum von Fermat (Opera, Tolosae 1679, p. 79 ff.) benutzt, um kompliziertere Konstruktionen auf einfachere zurückzuführen. Führt man Cartesische Koordinaten ein, so wird die Inversion in bezug auf den Kreis $x^2 + y^2 = R$ durch die Substitution:

$$x \,\Big\|\, \frac{Rx}{x^2+y^2}, \qquad y \,\Big\|\, \frac{Ry}{x^2+y^2},$$

oder wenn man jedem Punkte (x, y) die komplexen Zahlen

$$x + iy = z, \quad x - iy = z'$$

zuordnet, durch die Substitution

$$z' \,\Big\|\, \frac{R}{z}$$

ausgedrückt. Eine „Verschiebung" drückt sich durch

$$z \,\|\, z + \alpha,$$

eine „Dehnung" (bzw. Zusammenziehung) mit gleichzeitiger Drehung durch

$$z \,\|\, \beta z$$

(speziell $z \,\|\, -z$ eine „Umwendung"), also eine beliebige „Ähnlichkeit" durch die *affine* Substitution

$$z \,\|\, \beta z + \alpha,$$

Spiegelung an der x Achse durch $z' \,\|\, z$, aus.

Durch Zusammensetzung von Ähnlichkeiten, Spiegelungen und Inversionen ergibt sich die allgemeine „Kreisverwandtschaft", dargestellt durch eine linear gebrochene Substitution:

$$z \,\Big\|\, \frac{\alpha + \beta z}{\gamma + \delta z} \quad \text{bzw.} \quad z' \,\Big\|\, \frac{\alpha + \beta z}{\gamma + \delta z}$$

(schiefe und gerade Kreisverwandtschaft), die also als „*komplexe* Projektivität" auf der Geraden anzusehen und ein reelles Bild derselben ist. Über die Theorie der Kreisverwandtschaft siehe namentlich Möbius, Leipz. Ber. math.-phys. Kl. IV, 1852, p. 41 ff. (Crelles J. 52, 1856) = Werke II, p. 188 ff.; Leipz. Abh., math.-phys. Kl. II, 1855, p. 529 ff. = Werke II, p. 243 ff., über die Geschichte derselben siehe E. Kötter, l. c., p. 98 ff.

Wie eine Kreisverwandtschaft eine komplexe Projektivität ist, so ist eine schiefe Inversion eine komplexe Involution, ihre tautologen Punkte bilden den Inversionskreis, der also an die Stelle der Punkt*paare* einer Geraden tritt. Zwei Kreise sind „harmonisch", wenn die zugehörigen schiefen Inversionen vertauschbar sind; das tritt ein, wenn die Kreise sich senkrecht schneiden. Jede gerade Kreisverwandtschaft ist aus zwei schiefen Inversionen zusammengesetzt und durch drei Paare entsprechender Punkte bestimmt. Es gibt einen unendlich fernen Punkt; in jedem Falle ist zu unterscheiden, ob eine Beziehung zu diesem vorhanden ist oder nicht. Im ersten Fall ist der betr. Begriff, Satz, oder die betr. Aufgabe „inversibel", im zweiten nicht.

jedem Punkte A in bezug auf $M(MP)$ der auf $[MA]$ gelegene Punkt A', für den $MA \cdot MA' = MP^2$ ist. Den Punkten eines nicht durch M gehenden Kreises entsprechen Punkte eines nicht durch M gehenden Kreises; aber den Punkten einer Geraden die Punkte eines durch M gehenden Kreises und umgekehrt. Jetzt denke man sich eine Konstruktion als Steinersche mit dem Grundkreis $M(MP)$ ausgeführt. Diese Konstruktion ist sofort durch Inversion in bezug auf $M(MP)$ in eine Mascheronische zu übersetzen, wenn man zu jedem Punkt den inversen, zu jeder Geraden den inversen Kreis mit dem Zirkel allein konstruieren kann. Den inversen Punkt A' zu A findet man so: Sind Q, R die Schnittpunkte von $M(MP)$ mit $A(AM)$, so ist A' der zweite Schnittpunkt von $Q(QM)$ und $R(RM)$. Ist AM kleiner als $\frac{1}{2} MP$, so muß man es erst ver-n-fachen, $MA_n = n \cdot MA$, dann den inversen Punkt A_n' zu A_n konstruieren und aus

$$n \cdot MA_n' = MA'$$

den Punkt durch eine zweite Ver-n-fachung finden. Die Ver-n-fachung kommt auf die Verdoppelung zurück, und diese ergibt das reguläre Sechseck mit dem Radius MA. — Den Mittelpunkt des zur Geraden $[AB]$ inversen Kreises findet man als inversen Punkt zum zweiten Schnittpunkte von $A(AM)$, $B(BM)$.

Zu den Sätzen von Steiner und Mascheroni können wir hinzufügen, daß dieselben Konstruktionen mit Kreisen allein lösbar sind, die durch einen gegebenen Punkt gehen, wenn ein Kreis mit diesem Punkt als Mittelpunkt gezeichnet vorliegt.

Dieselben Konstruktionen sind mit dem Lineal allein lösbar, wenn von beiden (parallelen) Kanten desselben Gebrauch gemacht wird. Denn:

1. Man kann jeden Winkel halbieren, indem man zu seinen Schenkeln im Abstand der Linealbreite Parallelen zieht und die Diagonalen des entstehenden Rhombus zieht. Da diese Diagonalen außerdem aufeinander senkrecht stehen, so kann man alle Aufgaben des Paralleleziehens und Lotefällens lösen.

2. Um auch noch die quadratischen Aufgaben lösen zu können, hat man nur zu zeigen, daß man die Schnittpunkte einer gegebenen Geraden mit einem einzigen bestimmten, aber nicht gezeichnet vor-

---

Jeder gemeinsame harmonische zu zwei Kreisen ist Orthogonalkreis beider. Man kann jeden Kreis als zwei zusammenfallende konträren Sinnes betrachten, also in zwei solche „orientierte" Kreise zerlegen, gerade wie v. Staudt das gemeinsame harmonische Punktpaar durch Zuordnung des einen und des anderen Sinnes der Geraden in die zwei Punkte zerlegt.

1) Als Vorläufer der Steinerschen und Mascheronischen Konstruktionen sind die von Cardano, Tartaglia, Dürer u. a. mit *einer* Zirkelöffnung anzusehen (siehe Cantor II (2), p. 526).

liegenden Kreise finden kann; als diesen Kreis wählen wir den Kreis mit dem beliebigen Mittelpunkt M und der Linealbreite als Radius. Man fälle von M aus auf die gegebene Gerade $\mathfrak{G}$ das Lot MQ, errichte auf MQ in M das Lot $\mathfrak{H}$, ziehe zu $\mathfrak{H}$ im Abstande der Linealbreite beiderseits die Parallelen, welche auf MQ die Punkte A und B ausschneiden, konstruiere zu A, B und Q den vierten harmonischen S, lege von S aus die beiden Tangenten an den Kreis, indem man das Lineal mit einer Kante an M, mit der anderen an S anlegt. Da dies auf zwei Arten möglich ist, kommt hierdurch das Quadratische hinein. Die Schnittpunkte der beiden Tangenten mit $\mathfrak{G}$ sind zugleich die Schnittpunkte von $\mathfrak{G}$ mit dem Kreise.

Durch *Papierfalten*[1]) löst man leicht die Aufgaben: Strecken halbieren, Lote errichten, Parallele ziehen, Lote fällen, Winkel halbieren, also auch Strecken übertragen. Demnach kann man z. B. durch wirkliches Konstruieren, nicht bloßes Probieren[2]), reguläre Dreiecke und Fünfecke herstellen. Ein reguläres Fünfeck erhält man auch, wenn man in einen Papierstreifen von konstanter Breite einen Knoten macht und allmählich festzieht. (Ähnlich für das Sechseck.)

Die Konstruktionen durch Papierfalten sind identisch mit den Konstruktionen mit Streckenübertrager.

Konstruktionen mit dem Streckenübertrager.[3])

Unter einem Streckenübertrager verstehen wir ein Instrument, mit dem es möglich ist, eine Strecke an eine gegebene Gerade von einem gegebenen Punkte ab anzutragen, z. B. ein Lineal, an dem ein Maßstab oder eine verschiebbare Marke angebracht ist. Dies Instrument kann durch ein einfacheres ersetzt werden, welches nur eine bestimmte Strecke (die Einheit) und diese nur von einem bestimmten Punkte O ab auf den Geraden dieses Punktes abzutragen gestattet. Ein solches Instrument wollen wir einen *Einheitsdreher* nennen.

In der Tat, ist:

$$OP = OQ = OR = OS$$

die Einheit, so liefert das Rechteck $PQRS$ zwei Paare Parallelen; demnach sind zunächst die Aufgaben des Paralleleziehens lösbar.

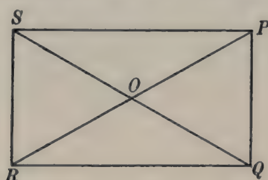
---

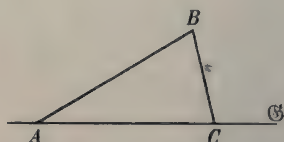
1) Urbano d'Aviso, Trattato della sfera e Prattiche per uso di essa. Col modo di fare la figura celeste. Opera cavata delli manoscritti del P. Bonaventura Cavalieri etc., p. 255, Rome 1682. E. Lucas, Récréations mathématiques (2) II (Paris 1896), p. 202. T. Sundara-Row, Geometrical exercises in paper folding, Madras 1893.

2) H. Wiener, Herstellung Platonischer Körper aus Papierstreifen, in W. Dyck, Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate and Instrumente, München 1892.

3) D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1903, p. 73. J. Kürschák, Math. Ann. 55 (1902), p. 597.

Um nun auf einer gegebenen Geraden 𝔊 eine gegebene Strecke von einem gegebenen Punkt A ab anzutragen, kann man sie zunächst durch bloßes Paralleleziehen nach AB parallel verschieben; dann ziehe man $OP \parallel AB$, $OQ \parallel 𝔊$, mache OP und OQ gleich der Einheit, ziehe $BC \parallel PQ$, so ist AC die Strecke in der verlangten Lage.

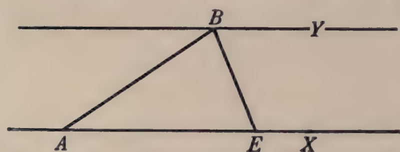




Der Streckenübertrager ist ferner äquivalent dem *Winkelhalbierer*[1]), d. h. einem Instrument, mit dem man imstande ist, jeden gegebenen Winkel zu halbieren.

Denn erstens: um einen Winkel BAC zu halbieren, braucht man nur $AB = AC$ zu machen, durch B die Parallele zu AC, durch C die Parallele zu AB zu ziehen und die Diagonale des so entstehenden Rhombus zu zeichnen.

Umgekehrt, ist ein Winkelhalbierer gegeben, so kann man durch Halbieren von Nebenwinkeln rechte Winkel konstruieren, wodurch zunächst in jedem Punkte auf jeder Geraden das Lot errichtet werden kann. Man errichte nunmehr in A und B Lote auf AB, halbiere die Rechten bei A und B durch AD und BC, so ist $ACDB$ ein Quadrat; also sind zunächst die metrisch linearen Konstruktionen ausführbar.



Um nunmehr eine Strecke auf die Gerade AX vom Punkt A aus abzutragen, verschiebe man sie zunächst durch bloßes Paralleleziehen nach AB, ziehe $BY \parallel AX$, halbiere ABY durch BE, so ist AE die übertragene Strecke.

Das Verhältnis der Konstruktionen mit dem Streckenübertrager zu den metrisch quadratischen wird am deutlichsten, wenn man sich den Streckenübertrager durch den Einheitsdreher ersetzt denkt. Dann werden bei diesen Konstruktionen nur die Schnittpunkte des um O mit der Einheit zu schlagenden Kreises mit *durch O gehenden* Geraden verwendet, während bei den allgemeineren metrisch quadratischen Konstruktionen, wenn man diesen Kreis als Steinerschen zugrunde legt, die Schnittpunkte dieses Kreises mit *beliebigen* Geraden verwendet werden. Daraus geht hervor, daß nur solche metrisch quadratische Aufgaben mit dem Streckenübertrager allein lösbar sein

1) Feldblum, Über elementargeometrische Konstruktionen. Diss. Göttingen 1899.

können[1]), welche bei jeder Wahl der darin vorkommenden willkürlichen Größen lauter reelle Lösungen haben, bei denen also die Diskriminanten der auftretenden quadratischen Gleichungen definite positive Größen sind. Dies trifft z. B. zu bei den konstruierbaren regulären Polygonen. Algebraisch ausgedrückt kommen zu den rationalen Operationen durch die Zentralen $y = Ax$ des Einheitskreises $x^2 + y^2 = 1$ nur die Quadratwurzeln $\sqrt{1 + A^2}$ hinzu. Umgekehrt sind also Konstruktionen, die auf quadratische Irrationalitäten dieser speziellen Art führen, durch Lineal und Streckenübertrager ausführbar.

Übrigens ist der Streckenübertrager nicht irgendeinem gezeichnet vorliegenden Datum äquivalent, da ein solches, aus Punkten und Geraden bestehend, lediglich deren Koordinaten, aber keine sonstigen Irrationalitäten einführen würde.

Aufgaben: Konstruktion der Achsen und der Brennpunkte eines Kegelschnitts.

Hat man zwei konjugierte Durchmesser, so erhält man die *Hauptdurchmesser* als Summe und Differenz der Entfernungen der Scheitel des einen von den Scheiteln des um 90° gedrehten andern.[2])

Wenn von einer gleichseitigen Hyperbel vier oder von einem Kreise drei Elemente gegeben sind, so sind weitere Elemente zu konstruieren.

Aufgabe des Apollonius[3]): Die Kreise zu konstruieren, die drei gegebene berühren.

Aufgabe des Malfatti[4]): Drei Kreise zu konstruieren, die einander und von denen jeder zwei Seiten eines gegebenen Dreiecks berührt.

---

1) Daß die angegebene Bedingung auch hinreichend ist, hat für den Fall, daß unter den Daten der Aufgabe nur eine willkürliche Größe vorkommt, Hilbert a. a. O., p. 80—82, bewiesen. Der Beweis ergibt sich leicht aus dem Satze von Landau (Math. Ann. 57 (1903), p. 53): Eine ganze rationale Funktion $f(x)$ mit rationalen Zahlenkoeffizienten, welche für keinen Wert der Variabeln negativ wird, ist eine Quadratsumme ganzer rationaler Funktionen mit rationalen Zahlenkoeffizienten.

2) Z. B. H. Meyer, Archiv d. Math. u. Phys. 13 (1849), p. 406.

3) Apollonius behandelte diese Aufgabe in den zwei verlorenen Büchern „Über Berührungen"; vgl. Pappus, l. c. II, p. 647. Über die weitere Geschichte des Problems s. E. Kötter, l. c., p. 109.

4) Malfatti, Mem. d. soc. It., Bd. 10 (Modena 1803), T. I, p. 235 ff. Crelle, Sammlung mathem. Aufsätze, p. 133. Gergonnes Annales de Mathématiques I, II. Steiner, Crelles J. I (1826), p. 178 = Werke I (1881), p. 35. Schröter, Crelles J. 77 (1874), p. 230 ff. (mit eingehenden Literaturnachweisen).

Dritter Teil.

Kubische Konstruktionen.

Algebraische Einleitung.

Wir verstehen hierunter Konstruktionen, welche, algebraisch gesprochen, außer rationalen Operationen nur Quadrat- und Kubikwurzeln erfordern. Auf diese Weise gebildete Ausdrücke nennen wir „*kubisch irrational*". Die einfachsten sind die Wurzeln kubischer Gleichungen die für die reduzierte Form der kubischen Gleichung:

$$x^3 - 3px - 2q = 0$$

durch die fälschlich sogenannte Kardanische Formel [1]):

$$x = \varepsilon \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \varepsilon^2 \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}, \quad \left(\varepsilon = 1, \ \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}\right)$$

gegeben sind. Ferner gehören hierher die Wurzeln biquadratischer Gleichungen. Denn eine reduzierte biquadratische Gleichung mit der kubischen Resolvente:

$$z^3 - az^2 + bz - c = 0$$

hat bekanntlich die Wurzeln [2]):

$$\varepsilon \sqrt{z} + \varepsilon' \sqrt{(a - z) + 2\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{c}{z}}}. \qquad (\varepsilon = \pm 1, \ \varepsilon' = \pm 1)$$

Im folgenden wird es notwendig werden zu entscheiden, ob eine gegebene kubische Gleichung:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

1) Die Auflösung wurde zuerst von Scipione dal Ferro 1515 entdeckt, aber nicht veröffentlicht, sondern handschriftlich seinem Schwiegersohn und Nachfolger Annibale dal Nave vererbt; dann von Nicola Tartaglia 1534 selbständig nacherfunden, von diesem 1539 Cardano mitgeteilt, der sie dann 1545 in seiner Ars magna veröffentlichte. Vgl. hierzu: Hankel, Zur Gesch. d. Math. im Altertum u. Mittelalter, p. 360ff. L. Matthiesen, Antike und moderne Algebra der litteralen Gleichungen, Leipzig 1878.

2) Die Auflösung der biquadratischen Gleichungen stammt von L. de Ferrari und wurde zuerst von Cardano in seiner Ars magna 1545 veröffentlicht. Unter den späteren Auflösungen sind die von Descartes (La géométrie, 1637) und von Euler (Com. Acad. Petrop. VI, 1739, Algebra, Petersb. 1770) hervorzuheben.

ganze oder rationale Wurzeln hat. Ist x_1 eine ganze Wurzel, so folgt aus:

$$d = -x_1(ax_1^2 + bx_1 + c),$$

daß als ganze Wurzeln nur Teiler von d in Betracht kommen.

Für rationale Wurzeln läßt sich zunächst zeigen, daß eine Gleichung:

$$y^3 + py^2 + qy + r = 0$$

mit ganzzahligen Koeffizienten p, q, r, als rationale nur *ganzzahlige* rationale Wurzeln haben kann. Denn ist $\frac{m}{n}$ eine solche rationale Wurzel mit teilerfremden m und n, so muß:

$$m(m^2 + pmn + qn^2),$$

durch n^3 geteilt, die ganze Zahl $-r$ ergeben. Da aber der Zähler durch keinen Faktor von n teilbar ist, so muß $n = 1$ sein.

Eine Gleichung:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

mit ganzzahligen a, b, c, d werde vermittels $x = \frac{y}{k}$ transformiert in:

$$y^3 + k\frac{b}{a}y^2 + k^2\frac{c}{a}y + k^3\frac{d}{a} = 0,$$

und für k werde diejenige kleinste Zahl gewählt, für welche die drei Koeffizienten:

$$k\frac{b}{a}, \quad k^2\frac{c}{a}, \quad k^3\frac{d}{a}$$

ganzzahlig sind. Hat die Gleichung in x eine rationale Wurzel, so muß die Gleichung in y eine rationale, also nach obigem Satze eine ganzzahlige Wurzel haben, also der Nenner jener rationalen Wurzel x ein Teiler von k sein. Durch die Substitution:

$$x = \frac{1}{x}$$

ergibt sich ebenso: Als Zähler für rationale Wurzeln kann man nur Teiler derjenigen kleinsten Zahl k in Betracht ziehen, für welche:

$$h\frac{c}{d}, \quad h^2\frac{b}{d}, \quad h^3\frac{a}{d}$$

ganzzahlig sind. Findet man also auf diesem Wege keine rationalen Wurzeln, so ist die Gleichung irreduktibel.

Daraus folgt z. B. die Irreduktibilität der Gleichung:

$$x^3 - 2 = 0,$$

von der die Verdoppelung des Würfels abhängt; ferner der Gleichung:

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0,$$

von der die Konstruktion des regulären Siebenecks abhängt; aber auch die Irreduktibilität der Gleichung:

$$x^3 - 3x - 2a = 0,$$

von der die Dreiteilung des Winkels abhängt für jeden beliebigen Wert von a; denn es genügt hierzu die Irreduktibilität für irgendeinen speziellen Wert von a, z. B. $a = \frac{1}{2}$ zu erkennen, welcher der Konstruktion des regulären 9-Ecks entspricht; und die Gleichung

$$x^2 - 3x - 1 = 0$$

ist offenbar irreduktibel.

Aber wenn eine kubische Gleichung irreduktibel ist, so ist sie auch nicht durch einen quadratisch irrationalen Ausdruck auflösbar. Genügte z. B. der Ausdruck:

$$x = p + \sqrt{q}, \text{ mit nicht ausziehbarer } \sqrt{q},$$

der Gleichung[1]):

$$x^3 - 3x - 2a = 0,$$

so ergäbe sich durch Einsetzen:

$$\sqrt{q} = -\frac{p^3 + 3pq - 3p - 2a}{3p^2 + q - 3}.$$

Hier müßte Zähler und Nenner verschwinden, also wäre

$$-q = 3p^2 - 3 = +\frac{1}{3p}(p^3 - 3p - 2a),$$

also:

$$(-2p)^3 - 3(-2p) - 2a = 0,$$

d. h. $x = -2p$ eine rationale Wurzel der gegebenen Gleichung.

Allgemeiner, sind p und q selbst quadratisch irrationale Größen $(\nu - 1)^{\text{ter}}$ Stufe, so ergäbe sich eine Wurzel $x = -2p$ von $(\nu - 1)^{\text{ter}}$ Stufe, usw.

Demnach sind die oben als irreduktibel angeführten Gleichungen auch nicht durch quadratische Irrationalitäten lösbar, die entsprechenden Aufgaben nicht mit quadratischen Konstruktionen, im metrischen Fall nicht mit Zirkel und Lineal zu lösen.[2])

---

1) Auf eine solche läßt sich jede reduzierte kubische Gleichung von der Form $x^3 - 3px - 2q = 0$ durch die Substitution

$$x \parallel x\sqrt{p}$$

bringen, also durch bloße Vermittlung einer Quadratwurzel.

2) Daß zur konstruktiven Lösung höherer Gleichungen Kreis und Gerade nicht ausreichen, wußte bereits J. Chr. Sturm (Mathesis enucleata, Nürnb. 1695), und Kepler erwähnt, daß sich das reguläre Siebeneck nicht konstruieren lasse (Harmonice Mundi, Linz 1619, Lib. I, prop. 45); s. z. B. auch R. Ch. Wagner, Examen methodi Renaldianae, Hamm. 1700, p. 8.

Kapitel I.

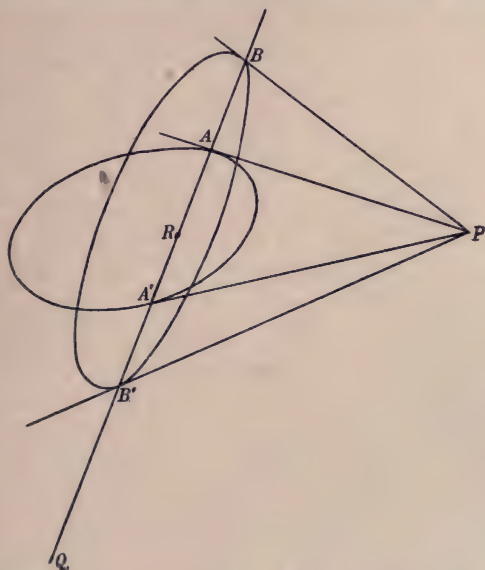
Projektive kubische Konstruktionen.

Als Fundamentalaufgabe legen wir die folgende zugrunde: *„Das gemeinsame Poltripel zu finden zu einem festen, gezeichnet vorliegenden und jedem beliebigen durch fünf Punkte gegebenen Kegelschnitt.“* [1]) Später wird sich herausstellen, daß es genügt, die Aufgabe nur für den spezielleren Fall als lösbar einzuführen, in welchem von den fünf willkürlichen Punkten zwei fest gegeben sind.

Zunächst läßt sich zeigen, daß auf Grund der kubischen auch die quadratische Fundamentalaufgabe lösbar ist. Man kann annehmen, daß das eine A, A' der beiden gegebenen Punktpaare, deren gemeinsames harmonisches gesucht wird, auf dem gezeichnet vorliegenden Kegelschnitt liegt, da sich der allgemeine Fall durch Perspektivität auf diesen zurückführen läßt. Nunmehr konstruiere man den Pol P der Geraden AA' und nehme als den durch fünf Punkte bestimmten Kegelschnitt den durch B, B', einen beliebigen dritten Punkt hindurchgehenden, die Geraden $[BP]$, $[B'P]$ tangierenden Kegelschnitt. Ist dann

$$PQR$$

das gemeinsame Poltripel, dann ist QR das gemeinsame harmonische Paar zu AA', BB'.



Die Lösung der kubischen Fundamentalaufgabe umfaßt also die der quadratischen.

Auf Grund der kubischen Fundamentalaufgabe wird auch die allgemeinere lösbar: das Poltripel P, Q, R zu zwei durch je fünf

1) Zur wirklichen Ausführung wäre also ein Kegelschnittzirkel zu verwenden, welcher einen Kegelschnitt durch fünf Punkte zu legen gestattet. Ein solcher ist von W. Jürges (Schlöm. Ztschr. 38 (1893), p. 350) angegeben worden; er beruht auf der projektiven Fundamentaleigenschaft, während die älteren Kegelschnittzirkel, wie der Ellipsenzirkel von Leonardo da Vinci (aber auch neuere, wie der von Brauer (vgl. hierüber Schlöm. Ztschr. 38 (1893), Hist.-lit. Abt., p. 195)) auf metrischen Eigenschaften beruhen. Über ältere Kegelschnittzirkel s. A. v. Braunmühl, Schlöm. Ztschr. 35 (1890), Hist.-lit. Abt., p. 161.

Punkte A', B', C', D', E' und A'', B'', C'', D'', E'' gegebenen Kegelschnitten $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}''$ zu konstruieren. Diese Aufgabe ist sofort auf die speziellere zurückgeführt, sobald gezeigt ist, daß man die beiden Kegelschnitte projektiv so transformieren kann, daß $\mathfrak{K}'$ in den gezeichnet vorliegenden $\mathfrak{K}$ übergeht. Zu dem Zweck wähle man auf $\mathfrak{K}$ vier Punkte A, B, C, X beliebig und bestimme D, E aus den Doppelverhältnisgleichheiten:

$$X(ABCD) = E'(A'B'C'D'),$$
$$X(ABCE) = D'(A'B'C'E'),$$

ferner zu jedem beliebigen Punkte P den projektiv entsprechenden $\bar{P}$ aus:

$$D(ABC\bar{P}) = D'(A'B'C'P),$$
$$E(ABC\bar{P}) = E'(A'B'C'P),$$

suche das gemeinsame Poltripel $\bar{P}$, $\bar{Q}$, $\bar{R}$ der beiden Kegelschnitte $[ABCDE]$ und $[\bar{A}''\bar{B}''\bar{C}''\bar{D}''\bar{E}'']$, und zu $\bar{P}$, $\bar{Q}$, $\bar{R}$ die rückwärts entsprechenden Punkte P, Q, R.

Ferner zeigen wir, daß man die vier Schnittpunkte (ebenso auch die vier gemeinsamen Tangenten) zweier Kegelschnitte konstruieren kann, wenn das gemeinsame Poltripel P, Q, R bekannt ist (das Umgekehrte ist evident): Man nehme von mehreren Punkten einer Geraden $\mathfrak{G}$ die Polaren in bezug auf beide Kegelschnitte; die Schnittpunkte entsprechender Polaren liegen auf einem durch P, Q, R gehenden Kegelschnitt, der also durch P, Q, R und zwei dieser Schnittpunkte gegeben ist. Legt man von den Punkten:

$$([QR], \mathfrak{G}), \quad ([RP], \mathfrak{G}]), \quad ([PQ], \mathfrak{G})$$

die Tangentenpaare an diesen Kegelschnitt und sind:

$$A, A', B, B', C, C'$$

die Berührungspunkte dieser Tangenten mit dem Kegelschnitt, so sind:

$$[PA], [PA'], [QB], [QB'], [CR], [CR']$$

die sechs gemeinsamen Sekanten.

Zum Beweise ist die *Steinersche Verwandtschaft*[1]) zu betrachten, die besteht zwischen einem Punkte X und dem Schnittpunkte Y der beiden Polaren von X in bezug auf die beiden Kegelschnitte.[2]) Be-

1) Steiner, Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander, Berlin 1832, p. 254 ff. = Werke I, p. 407. — Schröter, Steiners Vorlesungen über die Theorie der Kegelschnitte, 2. Aufl., Leipzig 1867, p. 297.

2) Die beiden Punkte X und Y sind natürlich auch konjugiert in bezug auf jeden andern Kegelschnitt, der mit den zwei gegebenen durch dieselben vier Punkte geht, wie sofort aus dem Satze 2 p. 18 folgt. Der duale Satz: Die Pole einer Geraden $\mathfrak{G}$ bezüglich der Kegelschnitte einer Schar liegen auf einer Geraden, liefert den Newtonschen Satz (p. 31, 2), wenn $\mathfrak{G}$ die unendlich ferne Gerade ist.

schreibt X die Punktreihe $\mathfrak{G}$, so dreht sich die eine Polare $\mathfrak{H}'$ um den Pol G' von $\mathfrak{G}$ in einem zur Punktreihe projektiven Strahlenbüschel; ebenso die andere Polare $\mathfrak{H}''$ um den anderen Pol G'' in einem projektiven Strahlenbüschel; also beschreibt Y einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ durch $G'G''$. Kommt X in den Schnittpunkt:

$$\bar{P} = (\mathfrak{G}, [QR])$$

der Geraden $\mathfrak{G}$ mit der Polaren von P bezüglich beider Kegelschnitte, so kommt Y nach P. Also geht $\mathfrak{K}$ durch P, ebenso durch Q und R.

Es sind X, Y ein Paar konjugierter Punkte in der Steinerschen Verwandtschaft, ebenso P und $\bar{P}$, folglich auch:

$$\bar{Y} = ([PX], [\bar{P}Y]) \quad \text{und} \quad \bar{X} = ([PY], [\bar{P}X])$$

nach dem bekannten Satze[1]): „Werden in einem vollständigen Vierseit zwei Diagonalen von einem Kegelschnitt harmonisch geschnitten, dann auch die dritte.“ — Nun liegt offenbar $\bar{X}$ auf $\mathfrak{G}$, also $\bar{Y}$ auf $\mathfrak{K}$, d. h. $[PX]$ schneidet $\mathfrak{K}$ in $\bar{Y}$, und $[PY]$ schneidet $\mathfrak{G}$ in $\bar{X}$. Beschreibt jetzt X die Punktreihe $\mathfrak{G}$, so ist das Strahlenbüschel $[PX]$ identisch mit dem Strahlenbüschel $[P\bar{Y}]$, dieses projektiv dem Strahlenbüschel $[G'\bar{Y}]$, also nach Obigem projektiv der von $\bar{X}$ beschriebenen Punktreihe, also auch projektiv dem von Y beschriebenen Strahlenbüschel.

Sind jetzt U, V zwei Schnittpunkte beider Kegelschnitte, welche mit P in einer Geraden liegen, ferner $X_1 = (\mathfrak{G}[UV])$ und U, V, X_1, Y_1 harmonisch, so sind X_1 und Y_1 konjugierte Punkte in der Steinerschen Verwandtschaft und die Gerade $[PX_1]$ gleich der Geraden $[PY_1]$. Nun folgt aus: X konjugiert Y und $\bar{X}$ konjugiert $\bar{Y}$, daß auch:

$$([X\bar{Y}][\bar{X}Y]) \quad \text{und} \quad ([X\bar{X}][Y\bar{Y}])$$

konjugierte Punkte sind. Der erstere dieser beiden Punkte ist aber

1) Hesse, Crelles J. 20 (1840), p. 301; 36 (1848), p. 146 = Werke (München 1897) p. 41, 159. Salmon-Fiedler, Kegelschnitte, 4. Aufl. (Leipzig 1878), Art. 236, 9, p. 291. Cremona, Curve piane, art. 109; deutsch v. Curtze (Greifswald 1865), p. 161. Chasles, Sect. con., art. 133. Schröter-Steiner, Kegelschn., p. 153. Rosanes, Schlömilchs Ztschr. 17 (1872), p. 174. — Zerfällt der Kegelschnitt in zwei Gerade, deren eine die unendlich ferne ist, so erhält man den Satz von Gauß (S. 31, 2).

P, also der zweite $\overline{P}$, d. h. die Gerade $[Y\overline{Y}]$ geht immer durch $\overline{P}$. Das Zusammenfallen der Geraden $[PX]$ und $[PY]$ findet also nur statt, wenn die Gerade $[\overline{P}\overline{Y}Y]$ Tangente des Kegelschnitts wird, und in diesem Falle wird nach Obigem diese Gerade $[PX] = [PY]$ eine gemeinsame Tangente beider Kegelschnitte und der Punkt $Y = \overline{Y}$ Berührungspunkt der von $\overline{P}$ an $\mathfrak{K}$ gelegten Tangenten. Damit ist die Richtigkeit der obigen Konstruktion bewiesen.

Nunmehr lösen wir auf einem zweiten, zu einem wichtigen Schlusse führenden Wege die Aufgabe, das Poltripel zu zwei durch je fünf Punkte gegebenen Kegelschnitten zu finden. Man suche zu zwei beliebigen Geraden die ihnen in der durch $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{K}''$ bestimmten Steinerschen Verwandtschaft entsprechenden Polkegelschnitte und transformiere wie oben projektiv so, daß der eine dieser Polkegelschnitte in den gezeichnet vorliegenden Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ übergeht; der andere gehe in $\mathfrak{L}$, die beiden Geraden in $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, die Kegelschnitte in $\overline{\mathfrak{K}}'$, $\overline{\mathfrak{K}}''$ über. Das Poltripel von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ liefert deren vier Schnittpunkte, von denen einer der Pol von $(\mathfrak{G}\mathfrak{H})$ ist. Die drei andern geben rückwärts transformiert das Poltripel von $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}''$.

Man kann das so einrichten, daß $\mathfrak{L}$ durch zwei fest gegebene Punkte I, J geht. Dazu nehme man von den zwei Geraden zunächst nur eine, transformiere ihren Polkegelschnitt in $\mathfrak{K}$, lege $\mathfrak{H}$ durch die Pole von I, J bezüglich $\overline{\mathfrak{K}}'$, $\overline{\mathfrak{K}}''$; dann geht $\mathfrak{L}$ durch I und J.

Letzteres ist auch dann noch ausführbar, wenn das Paar I, J nicht reell, sondern als gemeinsames harmonisches Paar von zwei sich trennenden Paaren AA', BB' gegeben ist (s. u.).

Daß durch die Einführung der kubischen Fundamentalaufgabe keine anderen als kubische Irrationalitäten eingeführt werden, ist offenbar, da die Aufsuchung der vier Schnittpunkte zweier Kegelschnitte algebraisch auf eine Gleichung vierten Grades, die Aufsuchung des gemeinsamen Poltripels auf deren kubische Resolvente führt.

Umgekehrt muß gezeigt werden, daß durch die kubische Fundamentalaufgabe *alle* Doppelverhältnisse konstruierbar werden, deren Koordinaten kubisch irrational in den gegebenen sind (projektiv kubisches Netz). Dazu ist zu zeigen, daß eine beliebige Gleichung dritten oder vierten Grades durch Aufsuchen des Poltripels oder, was nach Vorhergehendem dasselbe ist, der Schnittpunkte eines gezeichnet vorliegenden und eines durch fünf Punkte zu legenden Kegelschnitts aufgelöst werden kann. Diese Möglichkeit werden wir sogar unter der engeren Annahme dartun, daß der zu konstruierende Kegelschnitt durch zwei *fest gegebene* Punkte I, J hindurchgeht. Und mit Rücksicht auf die später zu machende Anwendung werden wir den Beweis für den Fall durchführen, daß die Punkte I, J konjugiert imaginär sind, woraus die Richtigkeit des Satzes für den Fall reeller Punkte nach dem Ponceletschen Kontinuitätsprinzip folgt (s. S. 52).

Zunächst legen wir die Grundpunkte A, B, C, D des Koordinatensystems zweckmäßig; nämlich C auf den gezeichnet vorliegenden Kegelschnitt, B auf $[IJ]$ so, daß $[CB]$ Tangente ist, A auf $[IJ]$ so, daß $ABIJ$ harmonisch sind. Die Wahl von D erfolgt weiter unten. Die Tangente in $C(0, 0)$ soll die Gerade $[CB]$ $x = 0$ sein, das ergibt nach S. 19, 5, daß $d = 0$ ist, und weil A zu C konjugiert ist, so ist $f = 0$. Da der Koeffizient von y^2 nicht Null sein kann, hat die Gleichung des gezeichnet vorliegenden Kegelschnitts daher die Form

$$y^2 = px - qx^2.$$

Der Koeffizient p kann nicht Null sein, denn dann bestünde der Kegelschnitt aus den zwei Geraden $y = \pm\sqrt{-q}\,x$. Wir setzen noch $a = \frac{p}{q}$, so daß für a zwar der Wert 0, aber nicht der Wert ∞ ausgeschlossen ist.

Jetzt betrachten wir einen beliebigen durch I, J gehenden Kegelschnitt, für den also A, B konjugierte Punkte sind. Daraus folgt nach S. 19, 4, daß der Koeffizient von xy in der Gleichung dieses Kegelschnitts gleich Null ist. Nunmehr wählen wir den Punkt D auf der Geraden $[CC']$ (oder auch $[CC'']$), wo C', C'' das zu A, B und I, J gemeinsame harmonische Paar ist. Welchen Einfluß hat diese Wahl von D auf die Form der Gleichung eines durch I, J gehenden Kegelschnitts? Da für alle Punkte auf $[AB]$ $x = \infty$, $y = \infty$ wird, so ergibt sich das Verhältnis von $x : y$ für die Schnittpunkte I, J der Geraden $[AB]$ mit dem Kegelschnitt

$$ax^2 + by^2 + c + 2dy + 2ex = 0$$

aus der Gleichung

$$ax^2 + by^2 = 0.$$

Andrerseits hat dieses Verhältnis nach S. 13, Z. 11 den Wert

$$x : y = (ABC'I) \quad \text{bzw.} \quad (ABC'J),$$

also $x^2 : y^2$ den Wert $(ABC'I)^2$ bzw. $(ABC'J)^2$, oder nach S. 45 den Wert $(ABC'C'') = -1$. Daraus folgt, daß $a = b$ sein muß. Demnach haben in dem gewählten Koordinatensystem alle durch I, J gehenden Kegelschnitte — von der Geraden $[IJ]$ kann natürlich abgesehen werden — Gleichungen von der Form:

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0.$$

Wir bringen jetzt einen solchen Kegelschnitt zum Schnitt mit dem gezeichnet vorliegenden

$$y^2 = px - qx^2,$$

dessen Punkte wir noch vermittels eines Parameters

$$t = \sqrt{p} \cdot \frac{x}{y}$$

in der Form darstellen:

$$x = \frac{t^2}{1 + \frac{t^2}{a}}, \quad y = \sqrt{p}\,\frac{t}{1 + \frac{t^2}{a}}.$$

Die Werte des Parameters t für die vier Schnittpunkte genügen also der biquadratischen Gleichung:

$$\left(1 + \frac{\alpha}{a} + \frac{\gamma}{a^2}\right) t^4 + \beta\frac{\sqrt{p}}{a} t^3 + \left(p + \alpha + \frac{2\gamma}{a}\right) t^2 + \beta\sqrt{p}\cdot t + \gamma = 0.$$

Diese kann durch Wahl von α, β, γ mit einer gegebenen biquadratischen Gleichung

$$At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Dt + E = 0$$

(in der wir $A \neq 0$ voraussetzen) in Übereinstimmung gebracht werden, wenn man die drei Unbekannten α, β, γ aus den fünf linearen Gleichungen:

$$1 + \frac{\alpha}{a} + \frac{\gamma}{a^2} = A, \quad p + \alpha + \frac{2\gamma}{a} = C, \quad \gamma = E,$$

$$\beta\frac{\sqrt{p}}{a} = B, \quad \beta\sqrt{p} = D$$

berechnen kann. Dazu ist es offenbar notwendig und hinreichend, daß für A, B, C, D, E die zwei Gleichungen:

$$B - \frac{D}{a} = 0, \quad A - \frac{C}{a} + \frac{E}{a^2} = 1 - q$$

erfüllt sind. Demnach muß eine gegebene Gleichung erst so transformiert werden, daß diese beiden Bedingungen erfüllt sind. Für $a = \infty$, also $q = 0$ kann man bekanntlich leicht den Bedingungen genügen, die dann $B = 0$, $A = 1$ lauten. Wir können also weiterhin $a \neq \infty$ annehmen. Der zweiten Bedingung kann man stets genügen, indem man alle Koeffizienten mit einem geeigneten von Null verschiedenen Faktor multipliziert; dies würde erstens für $q = 1$ unmöglich sein, aber dieser Fall ist auszuschließen, da dann der gezeichnet vorliegende Kegelschnitt auch durch I, J hindurchginge, also von den vier Schnittpunkten zwei bekannt, also die zwei andern durch eine bloß quadratische Konstruktion bestimmbar wären. Es würde zweitens unmöglich sein, wenn

$$A - \frac{C}{a} + \frac{E}{a^2} = 0$$

wäre; diesen Fall werden wir unten erledigen.

Die erste Bedingung erfüllt man vermittels einer Substitution

$$t \parallel kt,$$

in der man k aus

$$Bk^3 - \frac{Dk}{a} = 0, \quad k = \sqrt{\frac{D}{Ba}}$$

bestimmt. Damit dieser Wert für k endlich, nicht verschwindend und reell ist, muß

$$BDa > 0$$

sein. Ist das nicht der Fall, so kann man es vorweg durch eine Substitution

$$t \parallel t + \tau$$

erreichen, wodurch BD in

$$(B + 4A\tau)(D + 2C\tau + 3B\tau^2 + 4A\tau^3)$$

übergeht; diese wegen $A \neq 0$ sicher nicht identisch verschwindende biquadratische Funktion von τ hat die reelle Nullstelle

$$\tau = -\frac{B}{4A},$$

nimmt also für Werte von τ in unmittelbarer Nähe von diesem einerseits positive, andrerseits negative Werte an, falls nicht $\tau = -\frac{B}{4A}$ zugleich Wurzel der Gleichung

$$D + 2C\tau + 3B\tau^2 + 4A\tau^3 = 0$$

ist. Dann reduziert sich die gegebene Gleichung durch die Substitution $t \parallel t + \tau$ auf eine in t^2 quadratische Gleichung von der Form:

$$At^4 + Ct^2 + E = 0,$$

erfordert also zur Auflösung außer dem gezeichnet vorliegenden Kegelschnitt nur das Lineal. Es sei also τ so gewählt, daß in der transformierten Gleichung BDa positiv ist. Jetzt gehen die Koeffizienten A, C, E durch die Substitution

$$t \parallel t\sqrt{\frac{D}{Ba}}$$

über in

$$A_1 = \frac{AD^2}{B^2a}, \quad C_1 = \frac{CD}{Ba}, \quad E_1 = E.$$

Würde jetzt durch das Bestehen der Gleichung:

$$A_1 - \frac{C_1}{a} + \frac{E_1}{a^2} = 0$$

das Erfüllen der Bedingung:

$$A_1 - \frac{C_1}{a} + \frac{E_1}{a^2} = 1 - q$$

vereitelt, so wäre ja

$$AD^2 - BCD + EB^2 = 0,$$

also zerfiele die Gleichung vor der Substitution $t \parallel kt$ in

$$\left(At^2 + Bt + \frac{BC - AD}{B}\right)\left(t^2 + \frac{D}{B}\right) = 0,$$

wäre also bereits quadratisch lösbar. Zusammenfassend haben wir den Satz:

Eine nicht durch Quadratwurzeln auflösbare, sonst beliebige biquadratische Gleichung läßt sich durch eine bloß quadratisch-irrationale affine Substitution

$$t \parallel kt + \tau$$

in eine Gleichung transformieren, welche durch einen gezeichnet vorliegenden und einen durch zwei bestimmte Punkte gehenden Kegelschnitt gelöst wird, von dem weitere Punkte quadratisch konstruierbar sind.

Da im vorhergehenden immer $A \neq 0$ angenommen werden mußte, so muß man zur Auflösung einer kubischen Gleichung

$$At^3 + Bt^2 + Ct + D = 0$$

diese als biquadratische $At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Dt + E = 0$ mit $E = 0$ ansehen.

In dem vorliegenden Beweis dieses Hauptsatzes aus der Theorie der kubischen Konstruktionen ist für den gezeichnet gegebenen Kegelschnitt die Gleichung

$$y^2 = px - qx^2$$

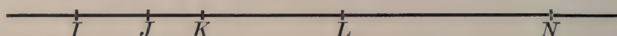
zugrunde gelegt worden. Wir könnten einen zweiten Beweis führen, in dem diese Gleichung in der Form

$$ax^2 + by^2 + c = 0$$

angenommen wird, die der Annahme eines Poltripels des gezeichnet gegebenen Kegelschnitts als Koordinatendreieck ABC entspricht. Bei den *metrischen* kubischen Konstruktionen werden wir einen solchen Beweis angeben, der sich dann leicht projektiv verallgemeinern läßt.

Daß von dem Kegelschnitt nur ein Stück gegeben zu sein braucht, beweist Smith.[1]) Einen elementaren Beweis für den metrischen Fall geben wir weiter unten; er läßt sich leicht projektiv verallgemeinern.

Aufgaben: Den bei den metrischen Konstruktionen auftretenden kubischen Aufgaben der Würfelvervielfachung und der Winkeldreiteilung entspricht hier die Aufgabe, zu den auf einer Geraden ge-



gebenen Punkten I, J, K, N den Punkt L so zu konstruieren, daß

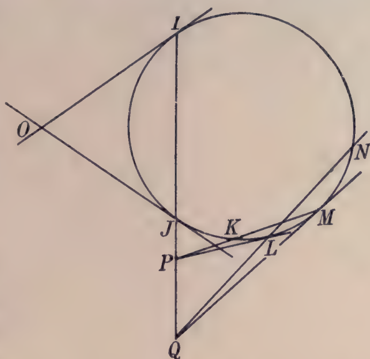
$$(IJKL)^3 = (IJKN)$$

ist, und die duale im Strahlbüschel.

1) Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques. Annali di Math. (2) 3, (1868) 112—165, 218—242 = Papers II, p. 1.

Der Würfelvervielfachung entspricht die Annahme von vier reellen Punkten I, J, K, N, der Winkeldreiteilung die Annahme, daß I, J konjugiert imaginäre Punkte sind. Natürlich folgen die Lösungen dieser Aufgaben aus der oben gegebenen Lösung einer allgemeinen biquadratischen Gleichung. Aber es gibt Lösungen, die diesen Aufgaben besonders angepaßt sind.

Wir werden später bei den metrischen kubischen Aufgaben solche Lösungen dieser Aufgaben angeben, welche fast unmittelbar projektiv zu verallgemeinern sind und dadurch die Lösungen der obigen zwei Aufgaben ergeben.



Mit Rücksicht auf S. 49 läßt die Aufgabe sich als projektive Bogendreiteilung auffassen: der Kegelschnittbogen $\widehat{KN}$ soll triseziert werden in bezug auf $[IJ]$, heißt: es sollen die Punkte L, M so konstruiert werden, daß die Tangente in L durch $([KM][IJ])$, die Tangente in M durch $([LN][IJ])$ geht, oder was dasselbe ist, daß $([OL][KM])$ der vierte harmonische zu K, M, P, und daß $([OM][LN])$ der vierte harmonische zu L, N, Q ist.

Zu beweisen: Die projektiven kubischen Aufgaben sind lösbar, wenn ein Kegelschnitt gezeichnet vorliegt und außerdem solche Kegelschnitte gezeichnet werden können, welche einen bestimmten Kegelschnitt doppelt berühren.

Ebenso: Wenn nur Kegelschnitte verwendet werden dürfen, deren jeder einem gegebenen Büschel angehört.

Die drei Doppelpunkte einer ebenen Projektivität zu bestimmen, die durch hinreichend viele einander entsprechende Punkte und Geraden gegeben ist.

Punkte und Tangenten des Kernkegelschnitts einer ebenen Reziprozität zu konstruieren, die durch hinreichend viele einander entsprechende Punkte und Geraden gegeben ist.

Die vier Grundpunkte einer Polarität in bezug auf ein Kegelschnittbüschel (Steinersche Verwandtschaft) zu konstruieren, die durch hinreichend viele einander entsprechende Punkte gegeben ist.

Die vier Grundgeraden einer Polarität in bezug auf eine Kegelschnittschar zu konstruieren, die durch hinreichend viele einander entsprechende Geraden gegeben ist.

Eine *bi-quadratische* Projektivität zwischen den Punkten $P(x)$ und $P'(x')$ einer Geraden wird durch eine in x sowohl wie in x' *quadratische* Gleichung definiert. Die Doppelpunkte $P = P'$ $(x = x')$

einer solchen werden also durch eine biquadratische Gleichung für x bestimmt. Umgekehrt kommt die Auflösung einer biquadratischen Gleichung

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0$$

zurück auf die Auffindung der Doppelpunkte, z. B. der bi-quadratischen Projektivität

$$ax^2x'^2 + 2b(x^2x' + x'^2x) + \frac{3}{\lambda + 1}c(x^2 + 2\lambda xx' + x'^2) + 2d(x + x') + e = 0,$$

die wir *symmetrisch*, also involutorisch, gewählt haben und die noch einen willkürlichen Parameter λ enthält. Eine solche ist offenbar durch fünf Paare entsprechender Punkte bestimmt.

Es sei jetzt $y = x^2$ die Gleichung eines gezeichnet vorliegenden Kegelschnittes, $f(x, y) = 0$ die Gleichung eines zweiten Kegelschnitts. Jede Tangente des zweiten trifft den ersten in zwei Punkten (x, y), (x', y'); projiziert man diese von B aus auf $[AC]\,(y = 0)$, so erhält man zwischen den Punkten $P(x, 0)$, $P'(x', 0)$ eine bi-quadratische Involution. Umgekehrt bestimmen je zwei entsprechende Punkte einer solchen Involution, von B aus auf den Kegelschnitt projiziert, je eine Tangente eines Kegelschnittes. Ist also auf $[AC]$ eine solche Involution durch fünf Paare entsprechender Punkte gegeben, so erhält man den Kegelschnitt $f(x, y) = 0$ durch fünf Tangenten; seine vier Schnittpunkte mit dem gezeichnet vorliegenden ergeben auf $[AC]$ projiziert die vier gesuchten Doppelpunkte.[1]) Der Parameter λ kann benutzt werden, um den Kegelschnitt $f(x, y) = 0$ einschränkenden Bedingungen zu unterwerfen.

Eine *trilineare* Projektivität zwischen Punkten $P(x)$, $P'(x')$, $P''(x'')$ einer Geraden wird durch eine in x sowohl wie in x' und in x'' *lineare* Gleichung definiert. Die Tripelpunkte

$$P = P' = P''\,(x = x' = x'')$$

einer solchen werden also durch eine kubische Gleichung für x bestimmt. Umgekehrt kommt die Auflösung einer kubischen Gleichung

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$$

zurück auf die Auffindung der Tripelpunkte z. B. der trilinearen *symmetrischen* oder involutorischen Projektivität:

$$axx'x'' + b(xx' + xx'' + x'x'') + c(x + x' + x'') + d = 0.$$

Eine solche ist offenbar durch drei Tripel zusammengehöriger Punkte bestimmt. Projiziert man sie auf den gegebenen Kegelschnitt, so

---

1) Ähnlich, aber unsymmetrischer bei Chasles (C. R. 41, 1855, p. 677), der eine bi-quadratische *Projektivität* annimmt.

liefert jedes Tripel ein Poltripel zu einem Kegelschnitt $f(x, y) = 0$, der durch drei solcher Tripel bestimmt wird, usw.[1])

Die übrigen Schnittpunkte zweier Kurven dritter Ordnung zu konstruieren, wenn von diesen Schnittpunkten sechs oder fünf und außerdem noch auf jeder der beiden Kurven drei oder vier Punkte gegeben sind.

Die drei übrigen Schnittpunkte zweier Kurven vierter Ordnung zu konstruieren, wenn dreizehn dieser Punkte gegeben sind.[2])

Zu zeigen, daß die kubischen projektiven Aufgaben auch dann lösbar sind, wenn außer dem gezeichnet vorliegenden nur solche Kegelschnitte benutzt werden, welche durch einen gegebenen Punkt des gezeichnet vorliegenden Kegelschnittes und durch zwei andere gegebene Punkte gehen.

Die Schnittpunkte einer durch hinreichend viele Elemente gegebenen Kurve dritter oder vierter Ordnung mit einer Geraden zu konstruieren. Die Tangenten an eine durch hinreichend viele Elemente gegebene Kurve dritter oder vierter Klasse von einem Punkte aus zu legen.

Kapitel II.

Affine kubische Konstruktionen.

Diese unterscheiden sich von den projektiven nur durch Hinzunahme des Paralleleziehens, also der Einführung der unendlich fernen Geraden. Für das Paralleleziehen kann wie früher der Mittelpunkt des gezeichnet vorliegenden Kegelschnittes oder, wenn es eine Parabel ist, deren Achsenrichtung gegeben sein. An Stelle der Doppelverhältnisse treten Verhältnisse, und die konstruierbaren Verhältnisse sind die kubisch irrationalen in den gegebenen Verhältnissen (affin kubisches Netz).

Die Fundamentalaufgabe kann durch die affin spezialisierte ersetzt werden: Das Poltripel (oder die vier Schnittpunkte bzw. Tangenten) eines festen, gezeichnet vorliegenden Kegelschnitts und einer Parabel von *entweder* gegebener Achsenrichtung *oder* gegebener Tangente zu konstruieren.

Um dies einzusehen, braucht man nur *entweder* die Punkte I, J (S. 68) zusammenfallend auf die unendlich ferne Gerade zu legen, *oder* die ganze Betrachtung zu dualisieren und von den beiden dann will-

1) Ähnlich bei B. Klein, Trilinear symmetrische Elementargebilde, Marburg 1881.

2) S. Smith, l. c. Kortum, Geom. Aufgaben dritten und vierten Grades. Bonn 1869.

kürlich zu wählenden *Geraden* $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}$ die eine ins Unendliche zu verlegen.

An Stelle des Kegelschnittzirkels tritt ein Parabelzirkel, der an vier beliebige Tangenten (von denen eine fest gegeben sein kann) die Parabel zu ziehen gestattet; oder ein Parabelzirkel, der durch drei gegebene Punkte die Parabel gegebener Achsenrichtung zu ziehen gestattet.

Auch der gezeichnet vorliegende Kegelschnitt darf eine Parabel sein, so daß hier überhaupt nur der affin spezialisierte Kegelschnitt zur Anwendung zu kommen braucht.

Aufgaben. Unter Zugrundelegung affiner Koordinaten zu zeigen, daß jede kubische und biquadratische Gleichung durch zwei Parabeln gelöst werden kann, von denen die eine gezeichnet vorliegt, die andere durch vier Tangenten bestimmt wird.

Um zu einem unendlich fernen Punkt den konjugierten in bezug auf zwei Kegelschnitte zu finden, ziehe man durch den Mittelpunkt jedes der beiden Kegelschnitte einen Durchmesser in der durch den unendlich fernen Punkt gegebenen Richtung; die beiden konjugierten Durchmesser schneiden sich in dem gesuchten Punkte.

Daraus ergibt sich die erste affine Lösung der kubischen Fundamentalaufgabe:

Man nehme als Gerade $\mathfrak{H}$ (S. 68) eine Tangente des der unendlich fernen Geraden entsprechenden Polkegelschnitts, und zwar in dem Punkte, der zu dem durch die gegebene Achsenrichtung bestimmten unendlich fernen Punkte polar ist. Dadurch wird in der Tat $\mathfrak{L}$ eine Parabel gegebener Achsenrichtung usw.

Ebenso einfach ergibt sich die zweite: Man wähle als Punkt H den Schnittpunkt der zu den beiden gegebenen Tangenten (deren eine die unendlich ferne Gerade ist) in der zur Steinerschen dualen Verwandtschaft bezüglich $\bar{\mathfrak{K}}'$, $\bar{\mathfrak{K}}''$ entsprechenden Geraden. Dann wird $\mathfrak{L}$ in der Tat eine Parabel, die außer der unendlich fernen Geraden noch eine gegebene Tangente hat, usw.

Kapitel III.

Metrische kubische Konstruktionen.

Diese unterscheiden sich von den affinen durch Hinzunahme des Lotefällens oder der Kreispunkte. Es werden alle und nur die Punkte und Geraden konstruierbar, deren Koordinaten kubisch irrational von den Koordinaten der gegebenen Punkte und Geraden abhängen (metrisch kubisches Netz).

Die Fundamentalaufgabe kann durch die metrisch spezialisierte ersetzt werden: Das Poltripel (oder die vier Schnittpunkte) eines festen gezeichnet vorliegenden Kegelschnitts und eines durch drei Punkte bestimmten Kreises zu konstruieren.

Daß die projektive kubische Fundamentalaufgabe durch die metrische lösbar wird, erkennt man, wenn man in der auf S. 68 gegebenen Aufgabe für die Punkte I, J, die zu den beiden Kreispunkten in bezug auf $\bar{\mathfrak{K}}'$, $\bar{\mathfrak{K}}''$ polaren Punkte nimmt. Legt man dann $\mathfrak{H}$ durch diese Punkte, so geht $\mathfrak{L}$ durch die Kreispunkte, ist also ein Kreis.

Natürlich darf der gezeichnet vorliegende Kegelschnitt *kein* Kreis sein, wenn man die konstruierbaren Kegelschnitte auf Kreise beschränkt.

Historisches über ältere Lösungen kubischer Aufgaben.

Solche Aufgaben, namentlich die beiden Probleme der Alten[1]): die Dreiteilung eines Winkels[2]) und die Verdoppelung eines Würfels (DelischesProblem[3])) sind schon in sagenhafterVorzeit und seitdem durch zwei Jahrtausende Gegenstand der Behandlung gewesen. Man bediente sich der verschiedensten Lösungsmittel; so wurde außer den Kegelschnitten[4]) eine Kurve dritter Ordnung (die Cissoide des Diocles[5])), eine Kurve vierter Ordnung (die Conchoide des Nicomedes, ca. 250—150 v. Chr.[6])) und eine Kurve des Eudoxus[7]) usw., ferner mechanische Apparate: das Mesolabium des Eratosthenes[8]), ein von Eutokius dem Plato (429—347 v. Chr.) zugeschriebener, aber wohl von Eudoxus stammender[9]) Apparat[10]), Lösungen durch Versuche (Heron)[11]), räumliche Konstruktionen[12]) usw. herangezogen. Geradezu als Kon-

1) Über diese und das dritte, das uns später beschäftigen wird, vgl. Montucla, Histoire des récherches sur la quadrature du cercle avec une addition concernante les problèmes de la duplication du cube et de la trisection de l'angle. Paris 1831.

2) Vgl. die Bibliographie von E. Wölffing in den Math.-nat. Mitt. d. math.-nat. Ver. in Württemberg 1900, 1902 u. Math. Bücherschatz (Leipzig 1903).

3) Über die in das dritte Jahrhundert v. Chr. zurückreichende Geschichte dieses Problems vgl. Archimedis opera ed. Heiberg (Leipzig 1881) 3, p. 102ff.

4) Menächmus (ca. 300 v. Chr.), s. Cantor I, p. 197.

5) S. Cantor I, p. 306. 6) S. Cantor I, p. 302.

7) S. P. Tannery, Mém. de Bordeaux, (2), II (Paris 1878), p. 277ff.

8) S. Cantor I, p. 285. Vietas „Pseudomesolabium" (1596) behandelt die Reduktion der Würfelverdopplung auf andere Aufgaben.

9) S. M. Simon, Gesch. d. Math. im Altertum (Berlin 1909), p. 201.

10) S. Cantor I, p. 195. 11) S. Cantor I, p. 317.

12) Archytas v. Tarent (ca. 430 v. Chr.); überliefert von Eutokius im Kommentar zu Archimedes, Über Kugel und Zylinder; Archimedes ed. Heiberg III (Leipzig 1881), p. 98ff. S. Cantor I, p. 196. Er konstruiert die zwei Mittel r, s zwischen $a > b$, für die also $r^2 = as$, $s^2 = br$ ist, durch Schneiden des Zylinders $x^2 + y^2 = ax$, des Kreisringes

$$x^2 + y^2 + z^2 = a\sqrt{x^2 + y^2}$$

struktionsmittel gleichberechtigt neben Zirkel und Lineal wurde in älterer Zeit die sog. „Einschiebung“[1]) angesehen, d. h. das Aufsuchen einer Strecke gegebener Länge, deren Endpunkte auf gegebenen (meist geraden) Linien liegen und die (verlängert) durch einen gegebenen Punkt geht. Wo es ging, führte man Einschiebungen mit Zirkel und Lineal aus.[2]) Daß es nicht immer ging, nötigte wohl zuerst dazu die Konchoide zu betrachten, beschrieben von einem Endpunkt einer Strecke, dem Intervall, deren anderer auf einer festen Geraden, der Leitlinie, gleitet und deren Verlängerung durch einen festen Punkt, den Pol, geht. Nicomedes verdankt man die Einführung dieser Linie, und er konstruierte auch (nach Proklus) ein Instrument (den „Konchoidographen“), um sie zu zeichnen, das älteste solche Instrument außer Lineal und Zirkel. Die Hauptideen der Konstruktionen der Alten, die hauptsächlich von Archimedes (l. c.) und Pappus (l. c.) überliefert sind, finden sich in späteren Arbeiten von Grégoire, Pascal, Chasles u. a., wie wir sehen werden, wieder.

Einen wirklichen Fortschritt bezeichnet dagegen Vieta, der in seiner „Effectionum geometricarum canonica recensio“ die heute sog. algebraische Geometrie schuf und auf Grund derselben und vermöge seiner algebraischen Kenntnisse in dem „Supplementum Geometriae“ zu dem wichtigen Haupt- und Schlußresultat kommt, daß jede kubische oder biquadratische Aufgabe, wenn sonst nicht lösbar, auf eine Würfelvervielfachung oder auf eine Winkeldreiteilung zurückzuführen sei.[3]) Den nächsten Fortschritt machte Fermat[4]), indem er die allgemeinen kubischen und biquadratischen Gleichungen durch eine Parabel und einen Kreis löste, nachdem schon vorher die Araber[5]) die allgemeine

---

und des Kegels

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2}{b^2} x^2;$$

ist (x, y, z) ein Schnittpunkt, dann ist

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad s = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

1) S. Zeuthen, Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, Kopenhagen 1896, p. 80.

2) Z. B. Appollonius in seinen zwei Büchern über Einschiebungen.

3) Dies Resultat hatte also nicht erst Descartes, wie Enriques (Fragen II, p. 266) meint (s. auch Cantor II, p. 539).

4) Ad locos planos et solidos isagoge. Oeuvres publ. par Tannery et Henry I, p. 91, spez. p. 107 = III, p. 85 spez. p. 99. Daß Fermat diese Schrift vor Descartes' Géometrie publiziert hat, geht aus der „Eloge de Monsieur de Fermat, Conseiller au Parlement de Toulouse“ (Le Journal des Sçavants I (1665), Amsterdam 1679, p. 81) hervor, wo es heißt: „. . . une introduction aux lieux plans et solides; qui est un traité analytique concernant la solution des problèmes plans et solides, qui avait été veu devant que M. Descartes eût rien publié sur ce sujet.“

5) Omar († 1123), Mémoire sur les démonstrations des problèmes de l'algèbre, publ. et trad. par Woepcke (Paris 1851), p. 46. Abul Wafa (940—998), Kitab

kubische, aber nur spezielle biquadratische Gleichungen, durch Kegelschnitte gelöst hatten.[1]) Die Parabel ist bei seiner Auflösung sogar eine „feste"; d. h. ihre Gleichung von der aufzulösenden Gleichung unabhängig. Aber Fermat hebt diesen Umstand nicht hervor. Mit Bewußtsein wurde die Beschränkung auf einen festen und *beliebigen* Kegelschnitt und sogar auf ein endliches Stück eines solchen von Descartes[2]) vollzogen. Er begnügt sich damit, die reduzierte biquadratische Gleichung $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ mit Hilfe einer festen Parabel $y = px^2$ und des Kreises

$$x^2 + y^2 + bp^2x + \frac{ap^2 - 1}{p}y + cp^2 = 0$$

zu lösen, dessen Mittelpunkt offenbar mit Lineal und Zirkel (oder bloß Streckenübertrager) konstruierbar ist. Die Lösung der reduzierten kubischen Gleichung $x^3 + ax + b = 0$ geht für $c = 0$ aus der obigen hervor. Da die vier Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 der biquadratischen Gleichung die Bedingung $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ erfüllen, erhält man als Kriterium dafür, daß vier Punkte einer Parabel auf einem Kreis liegen: daß ihr Schwerpunkt auf der Parabelachse liegt.[3]) Girard[4]) führte die Auflösung kubischer Gleichungen auf Winkeldreiteilungen zurück, die er mit einer Hyperbel vollzog. Später löst Newton[5]) die kubische Gleichung mit einer festen Ellipse oder Hyperbel, ebenso De la Hire[6]) die biquadratische, aber in unzulänglicher Weise. Durch

---

Alfhrist; s. Woepcke, Recherches sur l'hist. des sc. math. chez les Orientaux (Paris 1875), p. 28ff.

1) Spezielle Probleme, die aber auf allgemeine (d. i. den allgemeinen äquivalente) Gleichungen dritten und vierten Grades führten, hatten — natürlich ohne Bewußtsein dieser allgemeinen Bedeutung — schon Archimedes (Teilung einer Kugel in gegebenem Verhältnis, l. c. I, p. 215, III, p. 152) und Apollonius (Von einem Punkte die Normalen auf einen Kegelschnitt zu fällen. Kegelschnitte, Buch V) gelöst.

2) Geometria 1637 Appendix de cubicarum aequationum resolutione I, p. 345ff. Geometria I, p. 85ff., 325. Van Schooten in seinen Erläuterungen dazu. S. Cantor II, p. 736, 737. Auch R. F. de Sluse (Mesolabum, Leodii Eburonum, 1659) ist hier zu erwähnen.

3) S. auch Colson, Phil. Trans. Nr. 309, p. 2353; ferner R. Hoppe, Arch. Math. Phys. 56 (1874), p. 110, 69 (1883), p. 216 (für komplexe Wurzeln). Sind $\frac{u \pm iv}{2}$, $-\frac{u \pm iw}{2}$ die Wurzeln der reduzierten biquadratischen Gleichung $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$, so sind u, v, w zu finden aus

$$u^6 + 2au^4 + (a^2 - 4c)u^2 - b^2 = 0, \quad v^2 = u^2 + 2a + \frac{2b}{u}, \quad w^2 = u^2 + 2a - \frac{2b}{u},$$

also mit Parabel und Zirkel. A. Adler, Österr. Ingen. Archit.-Ver. Ztschr. 42 (1890), p. 146.

4) Invention nouvelle en algèbre 1629. 2. Aufl. v. H. Bierens de Haan, Leiden 1884. 5) Arithmetica universalis, Cantabrigiae 1707, p. 322.

6) Nouveaux élémens des sections coniques, Paris 1679, p. 400.

rein geometrische Überlegungen ist die Lösbarkeit eines allgemeinen kubischen Problems mit Hilfe eines festen Kegelschnitts nebst Zirkel und Lineal zuerst von Smith [1]) und Kortum [2]) gezeigt worden, mit elementaren analytisch-geometrischen Mitteln von dem Verfasser. [3])

Vorbereitende Bemerkungen und ältere Lösungen kubischer Aufgaben.

Die Aufgabe der Würfelvervielfachung [4]) ist von Hippocrates (ca. 420 v. Chr.) auf die Einschaltung von zwei mittleren Proportionalen zurückgeführt worden. [5]) Ist nämlich a die Kante des gegebenen, x die Kante des gesuchten Würfels, $\frac{b}{a}$ das gegebene Verhältnis, so ist:

$$x^3 = \frac{b}{a} \cdot a^3, \quad \text{also} \quad x = \sqrt[3]{a^2 b},$$

oder, wenn noch $y = \sqrt[3]{a b^2}$ gesetzt wird:

$$a : x = x : y = y : b.$$

x und y heißen die zwei *geometrischen Mittel* zwischen a und b; entsprechend sind $\frac{2a+b}{3}$ und $\frac{a+2b}{3}$ die zwei *arithmetischen Mittel* und $\frac{3ab}{a+2b}$ und $\frac{3ab}{2a+b}$ die zwei *harmonischen Mittel.* Diese Mittel treten später (bei Nikolaus von Kusa, Snellius, Gregory, Orontius Finäus, Huyghens) in merkwürdige Beziehung zum Rektifikationsproblem. Deshalb wollen wir sie gleich an dieser Stelle näher betrachten.

---

1) H. J. C. Smith, Mémoires sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques. Annali di Mat. (2) 3 (1869), 112—165, 218—242 = Coll. math. Papers II, p. 1.

2) Kortum, Über geometrische Aufgaben dritten und vierten Grades. Bonn 1869. Beide Schriften waren zur Bewerbung um den Steiner-Preis (1868) der Berliner Akademie eingereicht worden; der Preis wurde unter ihnen geteilt.

3) Über kubische Konstruktionen. Arch. d. Math. u. Phys. (3) III (1901), p. 112 ff.

4) Über den sagenhaften Ursprung dieses Problems vgl. den Brief des Eratosthenes (3. Jahrh. v. Chr.) an den König Ptolemäus, M. Cantor, Gesch. d. Math. I (1880), p. 181. — Die Auflösungen der Alten überlieferte Eutokius (6. Jahrh. n. Chr.) in seinem Kommentar zu Archimedes Schrift über Kugel und Zylinder. Über die Bezeichnung „Delisches Problem“ s. Cantor I, p. 198. v. Wilamowitz-Moellendorff, Gött. Gel. Nachr. 1894, Nr. 1. Über seine Geschichte s. J. Werner, Commentarius seu paraphrastica enarratio in undecim modos conficiendi ejus problematis, quod cubi duplicatio dicitur. Norimbergae 1522. N. R. Reimer, Historia problematis de cubi duplicatione. Gottingae 1798. O. Terquem, Notice historique sur la duplication du cube. Bull. de bibliographie, d'histoire et de biographie mathématiques II, p. 20. (Auszug aus Reimers Schrift.) Biering, Historia problematis cubi duplicandi. Kopenhagen 1844. (Nach Cantor IV, p. 28 ein Plagiat der Reimerschen Schrift.) Ambros. Sturm, Geschichte des Delischen Problems. Linz Progr. 1895, 96, 97.

5) S. Cantor I, p. 180.

Statt zweier Zahlen nehmen wir drei Zahlen a, b, c; dann versteht man unter ihren arithmetisch-harmonischen Mitteln die folgenden drei:

$$\frac{a+b+c}{3}, \quad \frac{ab+ac+bc}{a+b+c}, \quad \frac{3abc}{ab+ac+bc}, \tag{1}$$

deren erstes das arithmetische, deren letztes das harmonische Mittel ist.

Bei reellen Zahlen bilden diese Mittel in der angegebenen Reihenfolge eine fallende Reihe, wie sofort aus den beiden Identitäten:

$$(a+b+c)^2 - 3(ab+ac+bc) = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2] > 0,$$

$$(ab+ac+bc)^2 - 3(a+b+c)abc = \frac{1}{2}[(ab-ac)^2 + (ab-bc)^2 + (ac-bc)^2] > 0$$

hervorgeht. Daraus folgt noch, daß das Produkt der drei Mittel, also abc, kleiner ist als der Kubus des größten, nämlich des arithmetischen, und größer als der Kubus des kleinsten, nämlich des harmonischen Mittels. Daraus ergibt sich die Ungleichung:

$$\frac{a+b+c}{3} > \sqrt[3]{abc} > \frac{3abc}{ab+ac+bc}. \tag{2}$$

Nimmt man in der Ungleichung (2) statt a, b, c ihre ν^{ten} Potenzen $(\nu > 0)$, so folgt:

$$\left(\frac{a^\nu + b^\nu + c^\nu}{3}\right)^{\frac{1}{\nu}} > \sqrt[3]{abc} > \left(\frac{a^{-\nu} + b^{-\nu} + c^{-\nu}}{3}\right)^{\frac{1}{-\nu}}.$$

Läßt man ν gegen 0 konvergieren, so ergibt sich:

$$\lim_{\nu=0} \left(\frac{a^\nu + b^\nu + c^\nu}{3}\right)^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[3]{abc}, \tag{3}$$

so daß also das arithmetische, geometrische, harmonische Mittel der drei Zahlen a, b, c die den Werten $\nu = 1, 0, -1$ entsprechenden Fälle des ν^{ten} „Potenzmittels:

$$\sqrt[\nu]{\frac{a^\nu + b^\nu + c^\nu}{3}}$$

sind. Insbesondere erhält man die oben erwähnten Mittel für *zwei* Zahlen a und b, wenn man $c = a$ nimmt, wenn also, wie wir sagen wollen, a das doppelte *Gewicht* wie b bekommt. Nimmt man in (2) $c = a$, so ergibt sich:

$$\frac{2a+b}{3} > \sqrt[3]{a^2 b} > \frac{3ab}{a+2b}.$$

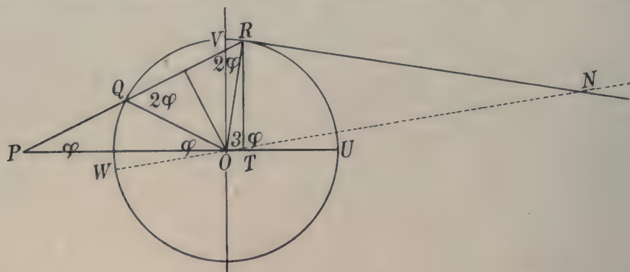
Ebenso wichtige Bemerkungen, wie die Zurückführung der Würfelvervielfachung auf zwei geometrische Mittel, sind auch bei dem

Problem der Dreiteilung des Winkels schon im Altertum gemacht worden:[1])

Ist OPQ ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Basiswinkel

$$OPQ = POQ = \varphi,$$

so schneidet der Kreis $O(OQ)$ die Gerade $[PQ]$ in R derart, daß



$OQR = ORQ = 2\varphi$, also $\sphericalangle ROT = 3\varphi$ ist. Setzt man den Radius gleich 1, $OP = x$, $OT = a$, $QR = 2y$, so ergibt die Figur die beiden Proportionen:

$$\frac{x}{2} = \frac{x+a}{1+2y} = \frac{1+y}{x},$$

aus denen:

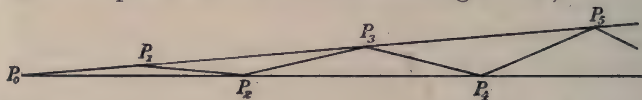
$$2 + 2y = x^2 \quad \text{und} \quad 1 + 2y = \frac{2(x+a)}{x},$$

also:

$$x^3 - 3x - 2a = 0 \tag{4}$$

folgt. Die Dreiteilung des Winkels ist geleistet, wenn die Strecke x oder der Punkt P gefunden sind. Ist der Winkel ROT verhältnismäßig klein, also a nahezu gleich Eins, so wird x nahezu gleich 2; der für $x = 2$ bestimmte Punkt soll daher der *approximative Trisektionspunkt* heißen. Er erhält später eine weitergehende Bedeutung.

An diese Figur, namentlich in der Erweiterung durch fernere gleichschenklige Dreiecke $P_2P_3P_4$, $P_3P_4P_5$ usw. mit den Basiswinkeln 3φ, 4φ usw. knüpfen zahlreiche Untersuchungen an.[2])



1) Daß aus $ROT = 3 \cdot RPT$ folgt $PQ = OQ$, ist der Inhalt des achten der von den Arabern uns überlieferten Lemmata des Archimedes (s. Cantor I, p. 256). Pappus (l. c., p. 273 ff.) schreibt diese Bemerkung ebenso wie die andere, daß $PV = 2 \cdot OQ$ ist, den „Alten" zu. Auf dieser beruht der Dreiteiler von Amadori (Sulla trisezione d'un angolo qualunque. Savona 1883): ein mit zwei Stiften P, V in zwei senkrechten Schlitzen OV, OP gleitendes Lineal, so einzustellen, daß seine Verlängerung durch einen beliebig gegebenen Punkt R des damit verbundenen Kreisbogens geht.

2) Z. B. bewegt Th. Ceva (Cycloidum anomalarum descriptio, s. Opuscula

Dieselbe Figur führt, wie bekannt, zur Konstruktion des *regulären Fünfecks.* Wird nämlich $\varphi = 36^0$ genommen, so wird der Winkel $OQR = ORQ = 72^0$, also der Winkel $QOR = 36^0$; folglich:

$$\Delta QOR \sim \Delta OPR,$$

und demnach:

$$QR : PQ = PQ : PR,$$

d. h. PR durch den Punkt Q nach dem goldenen Schnitt geteilt.

Nimmt man für das *reguläre Siebeneck* $\varphi = \frac{180^0}{7}$, so wird:

$$OQR = \frac{360^0}{7},$$

$$ROS = \frac{540^0}{7}.$$

Macht man $RS = 1$, so wird auch:

$$\sphericalangle RSO = \frac{540^0}{7};$$

folglich:

$$\sphericalangle ORS = \frac{180^0}{7};$$

also:

$$\sphericalangle PRS = \sphericalangle PSR = \frac{540^0}{7}.$$

Setzt man jetzt noch $OS = 2z$, so ergibt sich wie oben:

$$x^3 - 3x - 2z = 0, \quad 2 + 2y = x^2,$$

aber außerdem ist hier:

$$1 + 2y = x + 2z, \quad \text{also} \quad 2z = x^2 - 1 - x;$$

demnach folgt durch Elimination von z:

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0\,^{1)},$$

eine nach S. 63 offenbar irreduzible, auch nicht durch Quadratwurzeln auflösbare Gleichung, so daß das reguläre Siebeneck nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

---

mathematica, Mediolani 1699) in dieser Figur den Schenkel $P_0 P_1 P_3 P_5 \ldots$ und erhält dadurch als Bahnen der Punkte P_1, P_3, P_5, ... seine Kurven, die gezeichnet vorliegend die Dreiteilung, Fünfteilung usw. ermöglichen. Er konstruiert auch ein Instrument, das die bewegliche Figur repräsentiert, wie es ähnlich auch Tschirnhausen getan hat.

1) Diese Gleichung findet sich ähnlich hergeleitet schon bei einem anonymen Araber, Zeitgenossen des Abu Sahl Alkuhi (980) (s. Woepcke, im Anhang zur Algebra des Omar Alkhayyami); später bei Vieta (Variorum de rebus mathematicis responsorum, Lib. VIII, Protasis IV, Opera math., Lugd. Bat. 1646, p. 362).

Für das *reguläre Neuneck* gibt die analoge Figur die Gleichung:

$$x^3 - 3x - 1 = 0$$ [1]),

die man einfacher direkt aus der Dreiteilungsgleichung findet, da die in Gl. (4) S. 82 mit a bezeichnete Größe hier den Wert $\frac{1}{2}$ hat. Die entsprechende Figur für das reguläre Siebzehneck wird uns später die Konstruktion desselben ergeben.

Die beiden Aufgaben der Würfelvervielfachung und der Winkeldreiteilung führen beide auf Gleichungen von der Form:

$$x^3 - 3x - 2a = 0,$$

und zwar ist für den Fall der Dreiteilung $a < 1$, für den Fall der Würfelver-k-fachung, wo

$$x = \sqrt[3]{k} + \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$$

statt $\sqrt[3]{k}$ als Unbekannte zu nehmen ist,

$$a = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right) > 1.$$

Die Tatsache, daß in der Dreiteilungsfigur (S. 82) $PQ = QV = 1$ ist, hat zu verschiedenen Auflösungen des Trisektionsproblems mit Hilfe von „Einschiebungen" geführt.

Die Trisektionsfigur liefert sofort sechs verschiedene Auflösungen durch Konchoiden mit dem Pole R. Denn:

1. nimmt man OV als Leitlinie und das Intervall gleich 2, so erhält man den Punkt P [2]);

2. nimmt man OP als Leitlinie und das Intervall gleich 2, so erhält man den Punkt V;

3. und 4. nimmt man für dieselben Leitlinien das Intervall 1, so erhält man den Punkt Q [3]);

5. 6. { nimmt man schließlich den Kreis als Leitlinie und das Intervall gleich 1, so erhält man entweder den Punkt P oder den Punkt V. [4])

1) Diese Gleichung hatte in der oben angedeuteten Weise Abul Djud Mohammed ben Allaïth (1038) in Beantwortung einer von Albiruni in dessen Geometrie vorgelegten Frage hergeleitet (s. Woepcke l. c.). S. Cantor I, p. 652.

2) Von Proklus (ed. Friedlein, p. 272) dem Nicomedes (in dessen verlorener Schrift „de conchoidibus"), von Pappus (l. c., p. 246) sich selbst zugeschrieben.

3) S. z. B. Vieta, Supplementum geometriae, Opera, p. 240, Prop. IX, p. 245 (Cantor II, p. 539). Montucla, Histoire des recherches sur la quadrature du cercle (2. éd.) Paris 1871, p. 240.

4) Auf der Einschiebung von PV beruht auch die Trisektion des Jordanus Nemorarius, De triangulis (hrsg. von M. Curtze in den Mitt. des Kopernikus-Vereins VI, Thorn 1887), Satz 20 (Cantor II, p. 75).

Von diesen Auflösungen sind 1. und 3. die von Pappus (l. c.) überlieferten[1]), 2. und 4. die entsprechenden aber auf dem zweiten Konchoidenast beruhenden; die in 5. und 6. benutzte Konchoide mit Leit*kreis* ist die von Étienne Pascal[2]) eingeführte von Roberval[3]) benannte Pascalsche Schneckenlinie, von der Blaise Pascal bemerkt, daß sie zur Trisektion brauchbar ist.[4]) Übrigens ist diese letztere Trisektion den andern insofern überlegen, als die benutzte Kurve nur ein für allemal gezeichnet vorliegen muß, während in den früheren zu jedem Winkel eine besondere Konchoide gezeichnet werden müßte. Aber diese Linien sind von vierter, also höheren Ordnung als nötig.

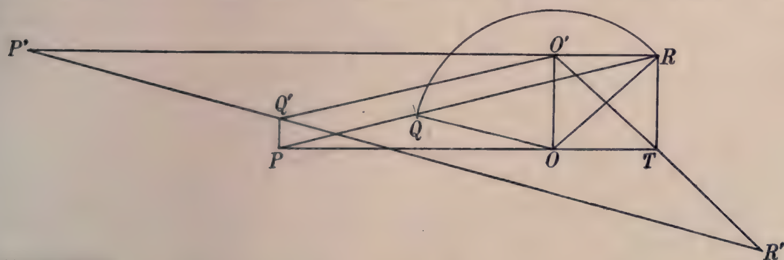
Auch der Umstand, daß Q der Mittelpunkt von PV ist, führt zu einer Konstruktion, indem man den Ort aller Halbierungspunkte der Strecken PV aufsucht, deren Endpunkte auf diesen beiden senkrechten Durchmessern liegen, während sich die Gerade PV um R dreht. Die Figur ergibt ohne weiteres:

$$PT : OT = RT : RT - OV,$$

also, wenn man die Abstände der Punkte R und Q von den Achsen OV und OP bzw. mit a, b und mit x, y bezeichnet:

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)\left(y - \frac{b}{2}\right) = \frac{ab}{4}$$

als Gleichung des gesuchten Ortes. Dieser ist also eine gleichseitige Hyperbel mit dem Durchmesser OR und den Asymptotenrichtungen $[OP]$, $[OV]$. Diese *Grégoire*sche Lösung ist nicht wesentlich verschieden von der folgenden, auch von Pappus überlieferten: Man ziehe die Senkrechten RO', PQ' und die Parallele $O'Q' \parallel RP$. Dann



1) Diese Einschiebungen sind später oft wiedergefunden worden, z. B. 1. von Newton (Arithm. univ.), ohne daß diese Identität immer erkannt wurde (s. z. B. Enriques, Fragen d. Elementargeometrie, Leipzig 1907, p. 243); ebenso 6. von Campanus (in den Anmerkungen zur ersten gedruckten Euklidausgabe, Venedig 1482, s. auch Copernicus in Curtze, Reliquiae Copernicanae, Schlöm. Ztschr. XIX (1874), p. 80ff. Regiomontan. s. Cantor I, p. 94, 257).

2) Nach P. Tannery (s. Cantor II, p. 806, Loria l. c., p. 136).

3) Mém. de l'acad. des sc. VI (Paris 1730), 23, lin. 8.

4) Sie ist zugleich Fußpunktkurve eines Kreises (s. Hippauf, Lösung des Problems der Trisektion, Leipzig 1872) und war vielleicht den Griechen bekannt (s. Cantor II, p. 75).

liegt Q' auf einer gleichseitigen Hyperbel, die auch durch O' geht und $[TR]$, $[TP]$ zu Asymptoten hat. Macht man

$$O'R' = 2 \cdot O'T, \quad R'P' = 2 \cdot R'Q',$$

so sieht man, daß die Pappussche Hyperbel zur Figur $OPQR$ mit der Grégoireschen Hyperbel zur Figur $O'P'Q'R'$ übereinstimmt.[1]) Übrigens genügt eine einmal gezeichnet vorliegende gleichseitige Hyperbel für alle Trisektionen. Man kann ja den Durchmesser OR stets so ziehen, daß er mit einer der Asymptoten den zu trisezierenden Winkel bildet.

Auch die Lösung von Chasles[2]) beruht auf einer gleichseitigen Hyperbel mit dem Durchmesser OR, die aber außerdem durch den Schnittpunkt von OT mit der Tangente in R geht; sie geht durch einen der beiden Dreiteilungspunkte des Bogens RU. Die obige Pappussche Hyperbel zur Drittelung des Bogens RU ist zugleich Chaslessche Hyperbel für den Bogen $RW = 270^0 - 2 \cdot RU$, von dem Q ein Dreiteilungspunkt ist (Fig. S. 82). Außerdem findet man leicht, daß die Koordinaten von R die beiden mittleren Proportionalen zwischen denen des Schnittpunktes N von $[OW]$ mit der in R auf $[OR]$ errichteten Senkrechten sind; das gibt eine einfache Konstruktion für das Delische Problem durch den über ON als Durchmesser zu schlagenden Kreis.[3]) Ist nämlich $xy = pq$ die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel, p und q die Koordinaten von N, so genügen die beiden geometrischen Mittel

$$x = \sqrt[3]{pq^2}, \qquad y = \sqrt[3]{p^2q}$$

sowohl der Hyperbelgleichung $xy = pq$, als der Gleichung

$$x^2 + y^2 = px + qy$$

des Kreises über ON als Durchmesser.

Durch denselben Punkt geht aber auch jede der beiden Parabeln:

$$x^2 = qy,$$
$$y^2 = px,$$

die von Menächmus (ca. 340 v. Chr.)[4]) zu diesem Zwecke benutzt wurden. In einer zweiten Lösung nimmt er eine der Parabeln mit der Hyperbel $xy = pq$ zusammen, während Descartes[5]) eine der beiden Parabeln und den Kreis $x^2 + y^2 = px + qy$ dazu benutzt.

---

1) Auch die Trisektion des Alsindschari (Cantor I, p. 644) ist nicht wesentlich anders.

2) Traité des sections coniques, Paris 1865, art. 37, p. 36.

3) Grégoire, Opus geometricum quadraturae circuli, Anvers 1668, lib. VI, prop. 138, p. 602.

4) Archimedis opera ed. Heiberg III, p. 92ff.

5) Geometria ed. Schooten, Amsterdam 1659, lib. III, p. 91, nouv. éd. (Paris 1886), p. 75.

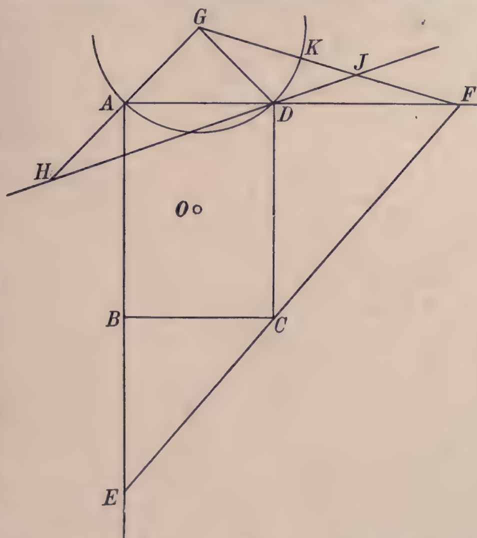
Bei einer andern, der dritten, von Pappus überlieferten Lösung wird zur Drittelung des Kreisbogens $\widehat{AB}$ diejenige Hyperbel mit der Exzentrizität 2 benutzt, welche A zum Scheitel des einen, B zum Brennpunkt des andern Astes hat. Von dieser ist eine Newtonsche[1]) und die von Clairaut[2]) nicht wesentlich verschieden. Letzterer benutzt den Umstand, daß diese Hyperbel auch die Sehne AB drittelt und die Halbierende des Winkels zur Direktrix hat.

Auch die Würfelvervielfachung wurde durch Einschiebungen mittels der Konchoide bewirkt.[3]) Diese Lösungen scheinen auf der Figur des Heron[4]) zu beruhen, in der $ABCD$ ein Rechteck, O sein Mittelpunkt, $OE = OF$ ist. Dann läßt sich leicht zeigen, daß

$$AD : BE = BE : DF = DF : AB$$

ist. Man findet also die beiden mittleren Proportionalen zwischen AD und AB, wenn man die Gerade ECF so legt, daß

$$OE = OF$$



ist. Apollonius bewerkstelligt das durch Probieren.

Die Lösungen von Vieta[5]) und Newton[6]) beruhen darauf, daß zunächst durch

$$AG = DG = AH$$

oder auf ähnlichem Wege die Gerade $[HD]$ und dann zwischen ihr und $[AD]$ die Strecke $IF = AG$ eingeschaltet wird, deren Verlängerung durch G geht. Bei Vieta wird KF statt BE genommen.

Auf einer andern Art Einschiebung beruht die Lösung von Diocles und Sporus.[7]) Man soll (s. Fig. S. 88) $DFEG$ so ziehen, daß $FE = EG$

1) Arithm. univ. (Cambridge 1707), p. 305.

2) C. Taylor, Geometrie of Conics, Cambridge 1881, Nr. 308, p. 126.

3) Zuerst von Nicomedes (s. Pappus l. c., p. 243), s. Cantor I, p. 303. Vgl. hierzu überhaupt: Pendlebury, Messenger (2) II, p. 166; Glaisher, Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Math. V, 244; S. Günther, Prager Akad. (6) IX, 1878.

4) Heron, Ballistik (s. Thevenot, Veteres mathematici, Paris 1693). Diese Lösung stimmt mit der des Apollonius und des Philo überein. Cantor I, p. 317.

5) Vieta, Supplementum geometriae, prop. V. Opera p. 242 ff.

6) l. c., p. 303.

7) Archimedis opera III, p. 78 ff., 90 ff. Eutocius berichtet über sie, als dem Sporus zukommend. Pappus l. c., p. 165. Sie findet sich später z. B. bei Dürer, Underweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt (Nürnberg 1525).

(oder $DF = JG$) wird; dann ist OE die größere der beiden mittleren Proportionalen zwischen OA und OB; ebenso JA zwischen DA und DH. Dreht man AB um A, so beschreibt der Punkt F eine Zissoide. Liegt diese gezeichnet vor, so kann der Punkt E zu gegebenem OB gefunden werden.

Nach diesem kurzen Überblick über die älteren Methoden sollen nunmehr einige neuere folgen, bei denen das Wesentliche die Erfüllung der schon von Descartes aufgestellten Forderung ist, daß nur ein *fester* Kegelschnitt benutzt werde.

Winkeldreiteilung durch eine gegebene Ellipse.

Hierfür ist folgender Satz die Grundlage: „*Es sei* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse; setzt man:*

$$x = a \cos \varphi; \quad y = b \sin \varphi \quad (0 \leqq \varphi < 2\pi),$$

so heißt φ *die „exzentrische Anomalie" des Punktes* x, y. *Vier Punkte der Ellipse sind konzyklisch, wenn die Summe ihrer exzentrischen Anomalien gleich Null ist, abgesehen von Vielfachen von* 2π."

Beweis. Setzt man:

$$t = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{y}{b} : \left(1 - \frac{x}{a}\right) = \left(1 + \frac{x}{a}\right) : \frac{y}{b},$$

so erhält man die Gleichungen der Ellipse in der Form:

$$x = a\, \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad y = b\, \frac{2t}{1+t^2}.$$

Die vier Schnittpunkte der Ellipse mit einem beliebigen Kreise:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

bestimmen sich aus der biquadratischen Gleichung:

$$a^2 \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + b^2 \frac{(2t)^2}{(1+t^2)^2} + A a \frac{1-t^2}{1+t^2} + Bb \frac{2t}{1+t^2} + C = 0$$

oder:

$$a^2(1-2t^2+t^4) + 4b^2t^2 + Aa\cdot(1-t^2)(1+t^2) + 2Bbt + 2Bbt^3 + C(1+t^2)^2 = 0,$$

wo also t und t^3 die gleichen Koeffizienten haben.

Infolgedessen ist, wenn mit t_1, t_2, t_3, t_4 die vier Wurzeln bezeichnet werden:

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = t_1 t_2 t_3 + t_1 t_2 t_4 + t_1 t_3 t_4 + t_2 t_3 t_4,$$

oder:

$$\sum \operatorname{tg} \frac{\varphi_i}{2} = \sum \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi_3}{2}.$$

Nun gilt für die Tangensfunktion die später abzuleitende Summationsformel:

$$\operatorname{tg} \sum x_i = \frac{\sum \operatorname{tg} x_i - \sum \operatorname{tg} x_1 \operatorname{tg} x_2 \operatorname{tg} x_3 + \cdots}{1 - \sum \operatorname{tg} x_1 \operatorname{tg} x_2 + \sum \operatorname{tg} x_1 \operatorname{tg} x_2 \operatorname{tg} x_3 \operatorname{tg} x_4 - \cdots}.$$

Daraus folgt für den vorliegenden Fall:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4}{2} = 0.$$

Damit ist unser Satz bewiesen.

Läßt man nun drei von den vier Punkten in einen einzigen mit der exzentrischen Anomalie ψ zusammenfallen, so schneidet dieser Kreis, der Oskulationskreis im Punkte ψ, die Ellipse in einem Punkte P mit der Anomalie φ, so daß:

$$3\psi + \varphi = 4R \text{ oder } 8R \text{ oder } 12R$$

ist[1]), also:

$$\psi = \frac{4R - \varphi}{3}, \text{ oder } \frac{8R - \varphi}{3}, \text{ oder } \frac{12R - \varphi}{3},$$

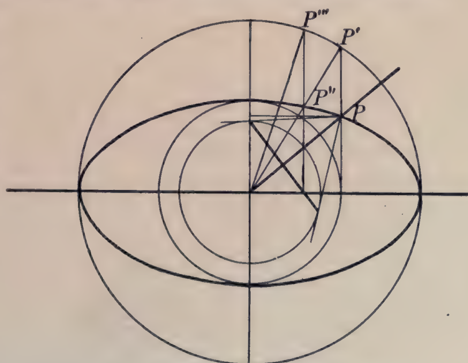
die drei zugehörigen Punkte liegen aber wieder nach demselben Satze mit dem zur Anomalie φ gehörigen Punkte auf einem Kreise, da ja:

$$\varphi + \frac{4R - \varphi}{3} + \frac{8R - \varphi}{3} + \frac{12R - \varphi}{3} = 8R$$

ist. Für die Gleichung dieses Kreises findet man leicht:

$$x^2 + y^2 - \frac{2e^2}{4a^2} x_P x + \frac{2e^2}{4b^2} y_P y - \frac{a^2 + b^2}{2} = 0,$$

wo e die Exzentrizität der Ellipse, x_P und y_P die Koordinaten des Punktes P mit der Anomalie φ bedeuten. Dieser Kreis liefert also zugleich die Dreiteilung des Winkels φ. Bezeichnet man die Koordinaten des Mittelpunktes mit x_M und $-y_M$, so ist:



$$x_M = \frac{e^2}{4a^2} x_P, \quad y_M = \frac{e^2}{4b^2} y_P,$$

also

$$x_M x_P + y_M y_P = \frac{e^2}{4},$$

1) Daraus folgt beiläufig eine sehr einfache Konstruktion des Krümmungskreises der Ellipse im Punkte mit der Anomalie ψ, da man nur den zur Anomalie $\varphi = -3\psi$ gehörigen Punkt zu konstruieren braucht; dann hat man zwei Punkte des gesuchten Kreises und die Tangente im einen.

d. h. der Punkt M liegt auf der Polaren von P in bezug auf den Kreis: $x^2 + y^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2$.

Ferner gilt:

$$\frac{y_M}{x_M} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y_P}{x_P} = \frac{a}{b} \cdot \frac{y_{P'}}{x_{P'}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{y_{P''}}{x_{P''}} = \frac{y_{P'''}}{x_{P'''}}.$$

Aus diesen beiden Daten läßt sich der Mittelpunkt des Kreises, und damit der Kreis selbst, der die Dreiteilung des Winkels liefert, leicht konstruieren.

Kubikwurzelausziehung durch eine gegebene Hyperbel.

Die entsprechenden Betrachtungen lassen sich an der Hyperbel für die Kubikwurzelausziehung anstellen; an Stelle der Kreisfunktionen sind die Hyperbelfunktionen einzuführen.

Bezeichnen wir den Scheitel ($x = 1$, $y = 0$) der gleichseitigen Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ mit A, die Koordinaten eines beliebigen Hyperbelpunktes P (auf dem Aste $x > 0$) mit x, y und den Inhalt des Hyperbelsektors AOP mit $\frac{\alpha}{2}$, so ist bekanntlich, wenn man x, y als Funktionen dieses Sektors betrachtet:

$$x = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} = \cos \operatorname{hyp} \alpha,$$

$$y = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} = \sin \operatorname{hyp} \alpha.$$

Die Dreiteilung des Hyperbelsektors erfordert die Konstruktion der Größe:

$$\xi = e^{\frac{\alpha}{3}} + e^{-\frac{\alpha}{3}},$$

welche der Gleichung:

$$\xi^3 - 3\xi - 2a = 0$$

genügt, worin:

$$a = \cos \operatorname{hyp} \alpha$$

ist.

Die Dreiteilung des Hyperbelsektors ist also im wesentlichen mit der Kubikwurzelziehung aus der Größe:

$$e^{\alpha} = x + y$$

identisch. Ist jetzt:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die Gleichung einer beliebigen Hyperbel und setzt man:

$$x = a \cos \operatorname{hyp} \varphi,$$

$$y = b \sin \operatorname{hyp} \varphi,$$

so ist

$$\frac{ab}{2}\varphi$$

der zum Punkte x, y gehörige Hyperbelsektor, und φ soll die „*exzentrische Anomalie*“ des Punktes x, y heißen. Jetzt beweist man genau wie bei der Ellipse den Satz: *Vier Punkte einer Hyperbel sind konzyklisch, wenn die Summe ihrer exzentrischen Anomalien gleich* 0 *ist (abgesehen von Vielfachen von* $2\pi i$, *was aber nur bei imaginären Punkten in Betracht kommt).*

Soll jetzt aus der positiven Größe k, die man größer als 1 annehmen darf, die Kubikwurzel konstruiert werden, so konstruiere man zunächst den Punkt $P(x, y)$ der Hyperbel, der auf den zu den Asymptoten parallelen Geraden:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = k \quad \text{und} \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{k}$$

liegt. Ist φ dessen Anomalie, so sind:

$$-\frac{\varphi}{3}, \quad -\frac{2\pi i + \varphi}{3}, \quad -\frac{4\pi i + \varphi}{3}$$

die Anomalien derjenigen Punkte, deren Oskulationskreise durch den Punkt P gehen, und diese drei Punkte liegen mit P auf dem ähnlich wie oben zu konstruierenden Kreise:

$$x^2 + y^2 - \frac{2e^2}{4a^2}x_P\, x - \frac{2e^2}{4b^2}y_P\, y - \frac{a^2 - b^2}{2} = 0.$$

Jeder dieser drei Punkte (nur der reelle kommt wirklich in Betracht) liefert vermittels:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \sqrt[3]{k}$$

einen der drei Werte dieser Kubikwurzel.[1])

Auflösung der biquadratischen Gleichung durch eine feste Ellipse.

Man kann wie S. 71 bewirken, daß der Koeffizient der dritten und der ersten Potenz der Unbekannten in der Gleichung

$$At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Dt + E = 0$$

1) Auch hier ergibt sich wie bei der Ellipse eine einfache Konstruktion des Krümmungskreises in einem gegebenen Punkte (x, y), da man ja die zugehörige Anomalie leicht vermittels

$$\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^3$$

verdreifachen kann; X, Y hat dann die dreifache Anomalie wie x, y usw. Gibt man der Hyperbelgleichung die Form $px + qy - rxy = 0$ (s. S. 19), so geht sie durch Inversion am Kreise $x^2 + y^2 = 1$ in die Strophoide über. Daraus ergibt sich die Übertragung der Sätze über konzyklische Punkte und Oskulationskreise. Über Strophoiden vgl. S. Loria, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, deutsch von F. Schütte (Leipzig 1902), p. 58.

gleiches Vorzeichen haben, und dann durch die Substitution

$$t \,\|\, \sqrt{\frac{D}{B}}\, t,$$

daß diese Koeffizienten in der neuen Gleichung einander gleich werden. Ist nun

$$x = a\frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = b\frac{2t}{1+t^2}, \quad t = \frac{y}{b} : \left(1 - \frac{x}{a}\right) = \left(1 + \frac{x}{a}\right) : \frac{y}{b},$$
$$a^2 - b^2 = e^2$$

für die gegebene Ellipse, so liefert sie mit dem Kreise

$$x^2 + y^2 - a^2 + 2e^2 \frac{(E-A)\frac{x}{a} + B\frac{y}{b} + (E+A)}{A-C+E} = 0$$

zusammen die Auflösung der Gleichung

$$At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Bt + E = 0.$$

Sollte $A - C + E = 0$ sein, so zerfiele die Gleichung in

$$(t^2+1)(At^2+Bt+E) = 0.$$

Auflösung der biquadratischen Gleichung durch eine feste Hyperbel.

Man kann wie S. 71 bewirken, daß der Koeffizient der dritten und der ersten Potenz der Unbekannten t in der Gleichung

$$At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Dt + E = 0$$

verschiedenes Vorzeichen haben, und dann durch die Substitution

$$t \,\|\, \sqrt{-\frac{D}{B}}\, t,$$

daß diese Koeffizienten in der neuen Gleichung absolut einander gleich werden. Ist nun

$$x = a\frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad y = b\frac{2t}{1-t^2}, \quad t = \frac{y}{b} : \left(\frac{x}{a} + 1\right) = \left(\frac{x}{a} - 1\right) : \frac{y}{b},$$
$$a^2 + b^2 = e^2$$

für die gegebene Hyperbel, so liefert sie mit dem Kreise

$$x^2 + y^2 - a^2 + 2e^2 \frac{(E-A)\frac{x}{a} + B\frac{y}{b} + (E+A)}{A-C+E} = 0$$

zusammen die Auflösung der Gleichung

$$At^4 - Bt^3 - Ct^2 + Bt + E = 0.$$

Sollte $A - C + E = 0$ sein, so zerfiele die Gleichung in

$$(t^2-1)(At^2-Bt-E) = 0.$$

Der auflösende Kreis ist also für die Gleichung

$$At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Bt + E = 0 \quad \text{und die Ellipse} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

derselbe wie für die Gleichung

$$At^4 - Bt^3 - Ct^2 + Bt + E = 0 \quad \text{und die Hyperbel} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

In der Tat geht der eine Fall in den andern über durch die Substitution

$$t \parallel ti$$
$$Bi \parallel B$$
$$bi \parallel b.$$

Wir beweisen nunmehr den zweiten Teil des Descartesschen Satzes, daß nämlich von dem Kegelschnitt nur ein Stück gegeben zu sein braucht. Es sei z. B. ein Ellipsen- oder Hyperbelbogen

$$x = a\frac{1-\varepsilon t^2}{1+\varepsilon t^2}, \quad y = b\frac{2t}{1+\varepsilon t^2}, \quad t' < t < t'' \quad \begin{pmatrix}\varepsilon = +1 \text{ Ellipse} \\ \varepsilon = -1 \text{ Hyperbel}\end{pmatrix}$$

gegeben. Die gegebene biquadratische Gleichung

$$At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Dt + E = 0,$$

wird durch jede der affinen Transformationen

$$t \parallel kt + \tau,$$

wo

$$k = \sqrt{\frac{D + 2C\tau + 3B\tau^2 + 4A\tau^3}{\varepsilon(B + 4A\tau)}}$$

ist, in eine durch den Kegelschnitt und einen Kreis auflösbare transformiert. Ist nun t_1 eine (reelle) Wurzel der gegebenen Gleichung und sei $\lambda \mp \pm 1$ zwischen t' und t'' gelegen, so wähle man für τ einen hinreichend nahen rationalen Näherungswert einer reellen Wurzel der kubischen Gleichung:

$$(t_1 - \tau)^2(B + 4A\tau)\varepsilon = \lambda^2(D + 2C\tau + 3B\tau^2 + 4A\tau^3),$$

und es sei λ_1 der zugehörige von λ, so daß diese Gleichung befriedigt ist. Dann ist der zugehörige Wert von $k = \frac{t_1 - \tau}{\lambda_1}$ reell, und *eine* Wurzel $\frac{t_1 - \tau}{k} = \lambda_1$ der transformierten Gleichung liegt zwischen t' und t'', d. h. der auflösende Kreis schneidet den gegebenen Kegelschnitt*bogen*.[1])

Aufgaben: (1) Den Durchmesser einer Kugel so zu teilen, daß eine im Teilpunkte senkrechte Ebene die Kugel in einem gegebenen Verhältnis teilt (Archimedes).[2])

1) Vahlen, Arch. d. Math. u. Ph. (3) III (1901), p. 116.
2) Opera ed. Heiberg I, p. 215; III, p. 152.

(2) Von einem Punkte $M(x_1 y_1)$ die Normalen auf einen gegebenen Kegelschnitt zu fällen. Apollonius [1]) löste diese Aufgabe durch eine Hyperbel mit zu den Kegelschnittachsen parallelen Asymptoten, die durch M und die vier Fußpunkte, bei Ellipse und Hyperbel noch durch den Mittelpunkt O geht. Da Pappus [2]) für den Fall der Parabel $x^2 = 2py$ die Anwendung eines Kegelschnittes tadelt, ist anzunehmen, daß er die Lösung der Aufgabe durch den Kreis

$$x^2 + y^2 - (y_1 + p)y - \frac{1}{2} x_1 x = 0$$

kannte, der durch die drei Fußpunkte und den Scheitel hindurchgeht. Hieran läßt sich eine Diskussion der biquadratischen Gleichung knüpfen.[3]) Für Ellipse und Hyperbel wurde das Normalenproblem mittels eines Kreises gelöst von De la Hire [4]) und Catalan [5]), einfacher und eleganter von Joachimsthal [6]): die andern Endpunkte der vom Scheitel S senkrecht zu den vier Normalen gezogenen Sehnen liegen auf dem Kreise

$$e^2(x^2+y^2-a^2) = 2\left\{\frac{x}{a}(a^2 x_1{}^2 - b^2 y_1{}^2) + 2\,a x_1 y_1 y - (a^2 x_1{}^2 + b^2 y_1{}^2)\right\};$$

seine gemeinsame Sehne mit dem Hauptkreise $x^2 + y^2 = a^2$ berührt den Kegelschnitt in einem Punkte T, so daß ST senkrecht zu OM ist. Die Hauptscheitel der Ellipse haben zu ihm die Potenzen $\left(\frac{2 b y_1}{e}\right)^2$ und $\left(\frac{2 a x_1}{e}\right)^2$, wonach er ebenfalls leicht zu konstruieren.[7])

(3) Auf das Normalenproblem für den Kegelschnitt läßt sich jede biquadratische Gleichung zurückführen. Ist z. B. im Fall der Ellipse die biquadratische Gleichung so transformiert, daß $B = D$ ist, so muß man vom Punkte

$$x_1 = \frac{e^2}{a}\sqrt{\frac{A}{A - C + E}}, \quad y_1 = \frac{e^2}{b}\sqrt{\frac{E}{A - C + E}}$$

die vier Normalen fällen, und die andern Endpunkte der vom Scheitel S auf sie senkrecht gezogenen Sehnen aufsuchen; ist x', y' einer von diesen, dann ist:

$$t' = \frac{y'}{b} : \left(1 - \frac{x'}{a}\right) = \left(1 + \frac{x'}{a}\right) : \frac{y'}{b}$$

eine Wurzel.

---

1) Kegelschnitte, Buch V.

2) l. c., p. 272. Vgl. hierzu Zeuthen, Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum. Deutsch von R. v. Fischer-Benzon, Kopenhagen 1886, S. 258.

3) Vahlen, Arch. d. Math. u. Phys, (3) III (1901), p. 120.

4) Nouveaux éléments des sections coniques, Paris 1679, p. 400.

5) Nouv. Ann. de math. (1) 7 (1848), p. 332.

6) Crelles J. 26 (1843), p. 172, 48 (1854), p. 377.

7) E. Lucas, Nouv. ann. (2) XV (1876). p. 1, XIX (1880), p. 279. S. ferner Painvin, ib. (2) IX (1870), p. 348; Smith l. c., p. 145.

Demnach kann man alle kubischen Probleme lösen, wenn man einen gezeichnet vorliegenden Kegelschnitt hat (der kein Kreis sein darf) und einen „Lotefäller". Als solcher kann der Winkelhaken dienen, aber in größerer Vollkommenheit leistet das Reuschs Spiegellineal [1]): die Kurve und ihr Spiegelbild müssen im Schnittpunkte mit dem Lineal ohne Knick zusammenstoßen. Das noch erforderliche Streckenübertragen bzw. Winkelhalbieren kann am einfachsten mit dem Spiegellineal selbst erfolgen: das Spiegelbild jedes Schenkels muß in die Verlängerung des andern fallen.

(4) Mit der Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ in den Kreis $x^2+y^2=a^2$ ein reguläres Siebeneck $SS_1S_2S_3S_4S_5S_6$ zu konstruieren.[2]) Projiziert man seine Ecken senkrecht zur Hauptachse a auf die Ellipse in die Punkte $T_1T_2T_3T_4T_5T_6$, so daß T_h die Koordinaten

$$a\cos\frac{2h\pi}{7},\quad b\sin\frac{2h\pi}{7}$$

hat, so liegen wegen des Satzes S. 88 $ST_1T_2T_4$ auf einem, $ST_3T_5T_6$ auf einem andern Kreise; als deren Gleichungen findet man:

$$(x-a)^2+y^2+\left(2a-\frac{e^2}{4a}\right)(x-a)\pm\frac{e^2\sqrt{7}}{4b}y=0.$$

(5) Mit der Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ in den Kreis $x^2+y^2=a^2$ ein reguläres Dreizehneck $SS_1\ldots S_{12}$ zu konstruieren. Von den Punkten

$$T_k\left(x=a\cos\frac{2k\pi}{13},\quad y=b\sin\frac{2k\pi}{13}\right)\quad(k=1,2,3,\ldots 12)$$

liegen $T_0T_1T_3T_9$, $T_0T_2T_5T_6$, $T_0T_4T_{10}T_{12}$, $T_0T_7T_8T_{11}$ auf je einem der vier Kreise:

$$x^2+y^2-\frac{e^2}{4a}x\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}\pm\frac{e^2}{4b}y\sqrt{\frac{13\mp 3\sqrt{13}}{2}}-\frac{a^2+b^2}{2}=0.$$

Entsprechend kann man die regulären $p=3\cdot 2^n+1$ Ecke konstruieren; während z. B. die $9\cdot 2^n+1$ Ecke zur Konstruktion die zweimalige Anwendung von Schnittpunkten der Ellipse mit Kreisen erfordern.[3])

---

1) Schlöm. Ztschr. 49 (1903), p. 385. 2) S. Vahlen l. c.

3) $p=7, 13, 97$ s. E. Pascal, Giornale di Matematiche di Battaglini, XXV (1887), p. 82. $p=19, 37$ s. I. Amaldi, ib. XXX (1892), p. 141; deren Konstruktionen erfolgen mit Hilfe einer zweckmäßig gewählten, also nicht festen Parabel. Affolter (Math. Ann. VI, (1873), p. 592) und Feldblum l. p. 60 c., konstruieren das reguläre Sieben- und Dreizehneck, indem sie deren kubische Resolvente, die natürlich drei reelle Wurzeln hat, auf eine Trisektion zurückführen, die bekannte Lösung des casus irreducibilis. Auch Huygens (Opera varia Lugd. Bat. 1724 I, p. 388) löste die Archimedische Kugelteilung durch eine

Diese Konstruktion regulärer Polygone mit Hilfe der Ellipse ist besonders deshalb naturgemäß, weil die Hilfspunkte $T_0, T_1 \ldots$ geradezu die Teilpunkte für die Ellipse in gleichen Sektoren sind.

(6) In einen gegebenen Winkel eine gegebene Strecke so zu legen, daß ihr Mittellot durch einen gegebenen Punkt geht.[1])

(7) Dreiteilung des kompleten elliptischen Integrals erster Gattung.[2])

Für $u = \frac{2}{3}K$, $v = \frac{2}{3}K'$ sind $dn u + \frac{1}{2}$, $-dn' v - \frac{1}{2}$, $\frac{dn u}{cn u} - \frac{1}{2}$, $\frac{dn' v}{cn' v} + \frac{1}{2}$ Wurzeln von

$$x^4 - \frac{3}{2}x^2 + (k^2 - k'^2)x - \frac{3}{16} = 0 \text{ usw.}$$

S. ferner E. Lampe, Geometrische Aufgaben zu den Gleichungen dritten und vierten Grades.

Über die Verwendung kubischer Kurven.[3])

Die Alten betrachteten die Kegelschnitte als die naturgemäßen Lösungsmittel für kubische Aufgaben, welche sie als „problemata solida (*προβλήματα στερεά*)“ wohl unterschieden neben die „problemata plana (*προβλήματα ἐπίπεδα*)“ stellten, die durch Zirkel und Lineal gelöst wurden. Und man verlangte sogar, daß nur bei Konstruktionen, deren Lösung mit Zirkel und Lineal nicht gelingt, die Kegelschnitte, und erst bei deren Unzulänglichkeit noch höhere Kurven zugezogen würden. So galt es als ein Fortschritt, als Menächmus die Aufgabe der Würfelverdoppelung, die früher durch Kurven dritter und vierter Ordnung gelöst wurde, durch Kegelschnitte löste. Auf demselben Standpunkte steht Descartes, für den die Kurven um so einfacher sind, je niedriger ihr Grad ist; nicht je leichter sie zu zeichnen sind oder die den Beweis oder die Konstruktion einer Aufgabe besonders leicht machen.[4])

Ganz anders Newton[5]), der mehr die wirkliche praktische Ausführung im Auge hat; für ihn ist eine Kurve um so einfacher, je

---

Trisektion. Diese Konstruktionen von Pascal, Amaldi, Affolter, Feldblum setzen die Gaußsche Theorie der Kreisteilungsgleichungen voraus, während die oben gegebenen nur auf dem eingangs bewiesenen elementaren Satz beruhen.

1) Kästner, Geometrische Abhandlungen I, p. 289.

2) Hoppe, Arch. Math. Phys. 56 (1874), p. 111.

3) Vgl. auch A. Favaro, Notizie storico-critiche sulla costruzione delle equazioni, Modena 1878; Appendice Modena 1880.

4) Geometria p. 18. Er bezeichnet es geradezu als geometrischen Fehler, Kurven von höherem Grad als nötig anzuwenden.

5) Arithmetica universalis, Appendix de aequationum constructione linearii

leichter sie sich mechanisch beschreiben läßt; für ihn steht die Konchoide hinsichtlich der Einfachheit der Beschreibung keiner Kurve außer dem Kreise nach. Betrachtet man die Auflösung der biquadratischen Gleichung mittels Kurven als ein Kapitel des graphischen Rechnens, mit dem Ziele, für Techniker, Rechner usw. praktische Auflösungsmethoden zu liefern, wie es heute in viel vollkommenerer Weise durch die Hilfsmittel der Nomographie (s. u.) erreicht wird, so ist der Newtonsche Standpunkt vollkommen berechtigt. Von demselben Standpunkte aus wird natürlich der größte und schönste Teil der Algebra, alles was sich auf die Auflösung der Gleichungen durch Radikale bezieht, ganz unwichtig, um nicht zu sagen wertlos, im Vergleich etwa mit der regula falsi oder ähnlichen Methoden der *numerischen* Auflösung. Durch diesen Vergleich wird es deutlich, daß der Wert des Descartesschen Satzes nicht nach der praktischen Seite, sondern vielmehr darin liegt, daß dadurch ein bestimmter algebraischer Zusammenhang erkannt wird; ganz ähnlich dem, daß Wurzeln kubischer und biquadratischer Gleichungen durch *Radikale* darstellbar sind; im Descartesschen Satze sind sie durch die Schnittpunkte von Kegelschnitten, die noch gewissen Beschränkungen unterworfen werden dürfen, darstellbar. Während man in der Algebra aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten die eine eliminiert, wird hier umgekehrt eine Gleichung mit einer Unbekannten auf ein System von zweien zurückgeführt, die aber noch in vorgeschriebener Weise von spezieller Art sind. Andererseits läßt sich eine kubische Gleichung auch als Resultat der Elimination einer Unbekannten aus einer Gleichung dritten und einer ersten Grades ansehen. Smith[1]) äußert sich über diese Möglichkeit wie folgt:

On admet . . . que tout problème qui n'a que n solutions et qui n'est pas transcendental, peut se résoudre par des intersections de droites et de courbes de l'ordre n. Et en effet, la vérité de ces théorèmes paraît découler des premiers principes de l'Algèbre. Mais . . . il se présente un choix de méthodes . . .; ainsi l'on peut faire dépendre la solution de tout problème cubique ou biquadratique, soit des intersections de courbes du troisième ou du quatrième ordre par des droites, soit des intersections mutuelles de courbes de second ordre, puisqu'on a la même évidence algébrique de la généralité absolue des deux méthodes. *On c'est la dernière de ces deux méthodes qui paraît la plus simple, et qui a été, à juste titre, préférée par les géomètres. Ainsi, l'on a ramené la recherche des points d'intersection d'une droite par une courbe du troisième ou du quatrième ordre à la recherche plus simple des points d'intersections de deux coniques, tandis que personne, que nous sachions, n'a suivi la marche inverse, qui à la vérité serait*

1) l. c. p. 1.

peu naturelle . . .[1]) Nous démontrerons qu'en se servant de cette courbe auxiliaire (de second ordre) on résout tous les problèmes cubiques et biquadratiques avec la règle et le compas seulement, *en les ramenant, pour ainsi dire, dans les limites de la géométrie élémentaire.*

Daß eine Gleichung n^{ten} Grades $a + bx + \cdots + x^n = 0$ sich durch eine Gerade und eine zu zeichnende Kurve n^{ter} Ordnung, z. B. durch die Gerade $y = 0$ und die Parabel $y = a + bx + \cdots + x^n$ lösen läßt, versteht sich von selbst. Aber die Smithsche Behauptung bezieht sich wohl auf den Fall, daß die Kurve n^{ter} Ordnung eine feste, gezeichnet vorliegende ist. Daß sich alle Irrationalitäten n^{ter} Ordnung durch die Koordinaten der Schnittpunkte von Geraden mit einer fest gegebenen (und beliebigen) Kurve n^{ter} Ordnung rational darstellen lassen, ist zweifelhaft und noch nicht einmal für den Fall $n = 3$ bewiesen. Man kann sehr leicht einige Auflösungen kubischer Gleichungen durch *spezielle* kubische Kurven angeben.[2]) Es sei erstens die Kurve

$$y = x^3$$

gegeben, die im metrischen Falle eine kubische Parabel ist, dann wird die vorgelegte kubische Gleichung

$$x^3 + ax + b = 0$$

natürlich durch die Schnittpunkte der Kurve mit der Geraden

$$y + ax + b = 0$$

gelöst. Es sei zweitens die Kurve

$$y^2 = x^3$$

gegeben, die im metrischen Fall eine semikubische oder Neilische Parabel ist, dann wird die gegebene kubische Gleichung

$$t^3 + at + b = 0$$

durch die Schnittpunkte der Kurve mit der Geraden

$$1 + ax + by = 0$$

geliefert, von deren Koordinaten die Wurzeln t vermittels der Substitution

$$t = \frac{x}{y} \qquad \left(t^2 = \frac{1}{x}, \quad t^3 = \frac{1}{y}\right)$$

abhängen.

---

1) Vgl. auch Chasles (Par. C. R. 41, 1855, p. 678): Employer d'autres courbes d'un ordre supérieur serait une faute de méthode . . .

2) F. London, Schlömilchs Ztschr. 41 (1896), p. 129. Jahresber. deutsch. Math. Ver. IV (1894/95), p. 163. Newton (Arithmetica universalis, p. 212. Appendix de aequationum constructione lineari) löste kubische und biquadratische Gleichungen mit Hilfe der Konchoide und Lineal und Zirkel. S. ferner Maclaurin, Algebra, frz. Paris 1753, p. 387.

Allgemeiner, hat die Gleichung der gegebenen Kurve die Form

$$l_1^3 = l_2 l_0^2,$$

wo l_0, l_1, l_2 lineare Funktionen von x, y sind, so wird die gegebene Gleichung:

$$t^3 + at + b = 0$$

durch die Gerade:

$$l_2 + a l_1 + b l_0 = 0 \quad \text{mit} \quad t = \frac{l_1}{l_0}, \qquad \left(t^3 = \frac{l_2}{l_0}, \quad t^2 = \frac{l_2}{l_1}\right)$$

aufgelöst. Darin ist der erste Fall für

$$l_0 = 1, \quad l_2 = y, \quad l_1 = x,$$

der zweite für

$$l_0 = y, \quad l_2 = 1, \quad l_1 = x$$

enthalten. Ein weiterer Fall ist z. B.:

$$l_0 = y, \quad l_2 = 1 - x, \quad l_1 = x,$$

also $t = \frac{x}{y}$; die Kurve

$$x^3 = y^2(1 - x)$$

ist im metrischen Fall die Zissoide. Aber alle diese Fälle repräsentieren im Grunde nur einen einzigen, da für den vorliegenden Zweck alle Kurven als gleichbedeutend anzusehen sind, die sich projektiv ineinander transformieren lassen. Die Kurve $l_1^3 = l_0^2 l_2$ ist eine sehr spezielle Kurve, sie ist vom Geschlechte Null, hat einen singulären Punkt, der (noch spezieller) eine Spitze ist. London beweist auch, daß eine *beliebige* kubische Kurve vom Geschlecht Null, aber nicht, daß eine beliebige kubische Kurve vom Geschlecht *Eins* dasselbe leistet.[1]) Auch muß man zeigen, um ein vollkommenes Analogon zum Descartesschen Satz zu haben, daß nur ein Stück der Kurve gezeichnet vorliegen muß.

Wir wollen nun den projektiven, affinen und metrischen Fall unterscheiden. Im affinen Fall müssen natürlich außer der kubischen Kurve zwei Parallelenpaare gegeben sein. Aber es ist die Frage, ob man, wie S. 53, eins derselben oder beide durch Zentralen der Kurve ersetzen kann; oder ob, wenn letztere die unendlich ferne Gerade berührt oder oskuliert, der unendlich ferne Berührungspunkt derselben die Parallelen ersetzen kann u. dgl.

Für den metrischen Fall müssen wie früher zwei Parallelenpaare und zwei Senkrechtenpaare gegeben sein. Es ist nicht nötig, daß ein Quadrat gegeben ist. Sind die gegebenen und zu konstruierenden

1) Gerade hierauf käme es an, wie auch im Descartesschen Satze jeder *beliebige* Kegelschnitt brauchbar ist. Bei vielen Aufgaben liegt es schon in der Natur der Aufgabe, daß ein Kegelschnitt gegeben ist; dann braucht man weiter nichts als Lineal und Zirkel.

Größen *Strecken*, so braucht man doch keinen Streckenübertrager, da die kubische Kurve natürlich auch quadratische Aufgaben zu lösen gestattet. Aber es bleibt zu untersuchen, durch welche speziellen Daten der Kurve (z. B. Achsen, Zentrum od. dgl.) die zwei Parallelenpaare und die zwei Rechten ersetzbar sind. Ein erstes Resultat in dieser Hinsicht ist das von London, daß der Mittelpunkt des Erzeugungskreises der Zissoide das Datum eines *Quadrates* ersetzen kann.

Nimmt man zu der gezeichnet gegebenen kubischen Kurve noch einen Kegelschnittzirkel bzw. im metrischen Falle einen Zirkel hinzu, so werden im allgemeinen, nämlich, wenn im metrischen Falle die gegebene kubische Kurve keine zyklische (durch die Kreispunkte gehende), z. B. keine Zissoide ist, Aufgaben fünften und sechsten Grades lösbar. Z. B. kann man mit der gegebenen Kurve

$$y = x^3$$

und dem Kreise

$$y^2 + x^2 + ay + bx + c = 0$$

die Gleichung sechsten Grades

$$x^6 + x^2 + ax^3 + bx + c = 0$$

auflösen. Jede Gleichung sechsten (also auch fünften) Grades läßt sich hierauf zurückführen, denn zunächst kann man die Glieder mit x^5, x^4 durch eine quadratische Transformation eliminieren, dann kann man (im allgemeinen) die Koeffizienten von x^6 und x^2 durch eine Substitution

$$x \parallel kx$$

einander gleich machen; das erfordert nur Lineal und Zirkel. Mit Hilfe einer kubischen Kurve nebst Lineal und Zirkel vollzog De la Hire [1]) die Fünfteilung des Winkels, und mit einer parabolischen Konchoide löste Descartes alle Gleichungen fünften und sechsten Grades.[2])

Beim Gebrauch nicht einer gezeichnet vorliegenden kubischen Kurve, sondern eines Instruments, z. B. eines Zissoidenzirkels [3]), werden natürlich Aufgaben bis zum neunten Grade lösbar; er ist also für kubische Aufgaben kein angemessenes Lösungsmittel, sein Konstruktionsbereich reicht darüber weit hinaus und wäre erst noch genauer

1) Mém. Par. 1710.

2) S. Claude Rabuel, Commentaires sur la géométrie de M. Descartes (Lyon 1730). Jac. Bernouilli, Notae et animadversiones in Geometriam Cartesii (Frankfurt 1695) = Opera (Genf 1744) II, p. 665. Vgl. J. A. Grunert, Arch. Math. u. Phys. 27 (1856), p. 245.

3) Newton l. c. S. auch Briot-Bouquet, Géom. anal., 16. Aufl., Paris 1897, p. 29. Seine Erzeugung beruht auf dem Satze: Wenn von zwei kongruenten Dreiecken jedes mit seiner Basis durch die Spitze des andern gleitet, so beschreibt der Mittelpunkt der Höhe eines jeden in der Ebene des andern eine Zissoide.

festzustellen. Dagegen löst ein Kegelschnittzirkel sowohl in beliebiger Anwendung als in der Beschränkung des Descartesschen Satzes die kubischen und nur die kubischen Aufgaben, ist also das diesen Aufgaben genau angemessene Lösungsmittel.

Spezielle kubische Kurven zur Würfelvervielfachung und Winkeldreiteilung.

Zur Würfelvervielfachung sind außer der Zissoide die schon erwähnte kubische Parabel ($y = x^3$) und die semikubische (Neilische) Parabel $y^2 = x^3$ besonders geeignet. Für letztere und die Zissoide gibt Matthiessen eine mechanische Erzeugung.[1]

Andere Kurven dieser Art sind Clairauts Mediatrixkurven[2]):

$$r^m \cos^n \varphi = \text{const.},$$

welche die fragliche Aufgabe lösen, wenn eine der Zahlen m, n den Wert 3, die andere einen der Werte $\pm 2^\varkappa$ hat.

Die Kurve für $m = 1$, $n = 2$, also

$$r \cos^2 \varphi = \text{const.},$$

ist nach P. Tannery[3]) die, welche Eudoxus von Knidos benutzte, um die stereometrische Lösung des Delischen Problems des Archytas (s. S. 77 Anm. 12) in eine planimetrische überzuführen. Projiziert man nämlich die Schnittkurve des Kreisringes

$$x^2 + y^2 + z^2 = a\sqrt{x^2 + y^2}$$

und des Kegels

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 x^2}{b^2}$$

auf die Ebene $z = 0$, so erhält man die Kurve

$$a^2(x^2 + y^2) = \frac{a^4}{b^4} x^4, \quad \text{also} \quad r \cos^2 \varphi = \frac{b^2}{a}.$$

Die Kurve ($m = 1$, $n = -3$), also

$$r = c \cos^3 \varphi$$

kannte Kepler.[4])

---

1) L. Matthiessen, Arch. d. Math. u. Phys. (1) 48 (1868), p. 229.

2) A. Clairaut, Misc. Berol. IV (Berlin 1734). Loria l. c., p. 316; etwas speziellere Kurven hatte Descartes, Géom., p. 17 (die er auch graphisch erzeugt); ferner Caraccioli, De lineis curvis liber (Pisa 1740), p. 112.

3) Mém. de la soc. d. sc. Bordeaux (2) II, 1878; s. auch G. Loria, Le scienze esatte nell' antica Grecia I, Nr. 51, 52, 73.

4) Astronomia nova (Prag 1609), p. 337. S. auch V. Viviani, Quinto libro di Euclide o Scienza universale delle proporzioni (Florenz 1647), p. 275—280. A. Wittstein (Archiv (2) XIV, 1896, p. 109). G. de Longchamps, Essai sur la géometrie de la règle et de l'équerre (Paris 1890), p. 126. G. Loria, Kurven, p. 317.

Die Kurve ($m = 1$, $n = 3$), also

$$r \cos^3 \varphi = \text{const.}$$

hat Longchamps als kubische Duplikatrix (richtiger Multiplikatrix) eingeführt.[1])

Schließlich kann hier noch die Duplikatrix von Montucci[2]) genannt werden:

$$\frac{\sin \varphi \,.\, \cos^2 \varphi}{r} = \text{const.}$$

Zur *Multiplikation* ist z. B. noch die Astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ geeignet.[3]) Ihre Tangente im Punkte (x, y) zerfällt durch den Berührpunkt in die Stücke $x^{\frac{2}{3}}$ und $y^{\frac{2}{3}}$.

Auch zur Winkeldreiteilung gibt es eine Reihe besonders geeigneter Kurven, sog. Trisektrixkurven.

Die älteste ist wohl die Trisektrix von Maclaurin, die in Bipolarkoordinaten die Gleichung: $\psi = 3\varphi$ hat, wodurch ihre Anwendung zur Trisektion sofort deutlich wird.[4])

Die Trisektrix von Catalan[5]) ist die minus-erste Fußpunktkurve der Parabel in bezug auf ihren Brennpunkt. Ihre Polargleichung

$$r \sin^3 \frac{\varphi}{2} = \text{const.}$$

läßt ihre Anwendung zur Würfelvervielfachung erkennen. Für die Trisektion kommt in Betracht, daß ihre Tangente im Punkte (r, φ) mit dem Radius r den Winkel $\frac{90^0 - \varphi}{3}$ bildet.

Die Gaußsche[6]) Sinusspirale

$$r = \frac{1}{\cos^3 \frac{\varphi}{3}}$$

hat die Eigenschaft, daß ihre Normale im Punkte (r, φ) mit dem Radius r den Winkel $\frac{\varphi}{3}$ bildet.

---

1) Longchamps l. c., p. 92—94. Uhlhorn (Entdeckungen in der höheren Geometrie, Oldenburg 1809, p. 54) hatte sie als Toxoide bezeichnet. Loria l. c., p. 89.

2) Nouv. ann. 1857, p. 449. Résolution de l'équation du 5e degré (Paris 1869), Elgé, Journ. de Math. spec. 1896; Loria l. c., p. 159.

3) L. Matthiesen, Arch. d. Math. u. Phys. (1) 48 (1868), p. 231.

4) Maclaurin, A Treatise on fluxions, frz. v. R. P. Pezenas I (Paris 1749), p. 198; Geometria organica (London 1720), p. 23. Vgl. auch G. de Longchamps l. c., p. 120; H. Brocard, Journ. de Math. spéc. (3) V (1891); Loria l. c., p. 81 ff.

5) E. Catalan, Journ. de math. spéc. (2) IV (1885), p. 229 ff. Loria l. c., p. 86.

6) F. Gauß, Progr. Bunzlau 1890.

Die Trisektrix von Longchamps[1]) wird durch den Schnitt zweier Tangenten eines Kreises beschrieben, deren Berührpunkte den Kreis in entgegengesetztem Sinne, der eine mit doppelter Geschwindigkeit wie der andere durchlaufen. Diese Erzeugung, der der gleichachsigen Hyperbel (s. S. 38) ähnlich, oder auch die Polargleichung

$$r \cos 3\varphi = \text{const.}$$

lassen erkennen, wie man mit ihrer Hilfe Winkel triseziert.

Die Trisektrix von Delanges[2]) beschreibt der Schnittpunkt des Mittellots einer sich um einen festen Punkt O drehenden Strecke OM mit der näher an OM liegenden Trisezierenden des Winkels MOA.

---

1) G. de Longchamps, Mathesis VIII (1888). Astor, Nouv. ann. (3) XIV (1894), p. 385. Bellavitis, Mem. d. l. Soc. Ital. delle Science III (3) 1879. Loria l. c., p. 87.

2) P. Delanges, La trisegante nuova curva (Verona 1783). W. Hilouse, Analyst IX, 1882 (hier auch ein Trisekantenzirkel). Loria l. c., p. 215 ff.

Vierter Teil.

Höhere algebraische und transzendente Konstruktionen. — Anwendungen und Ergänzungen zu den vorhergehenden Teilen.

Kapitel I.

Wurzelziehung und Winkelteilung durch algebraische Kurven.

Von höheren algebraischen Konstruktionen kommt in erster Linie die Ziehung der n^{ten} Wurzel in Betracht, d. h. z. B. im Strahlenbüschel die Konstruktion desjenigen Strahles $\mathfrak{X}$, für den:

$$(\mathfrak{I}\mathfrak{J}\mathfrak{K}\mathfrak{X})^n = (\mathfrak{I}\mathfrak{J}\mathfrak{K}\mathfrak{M})$$

ist, bei gegebenen Strahlen $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{M}$.

Dem Fall, daß die beiden Strahlen $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{J}$ konjugiert imaginär sind, entspricht in der metrischen Geometrie, wenn die beiden konjugiert imaginären Strahlen durch die beiden Kreispunkte gehen (s. S. 39), die Aufgabe, den Strahl $\mathfrak{X}$ so zu konstruieren, daß

$$\sphericalangle \mathfrak{K}\mathfrak{X} = \frac{1}{n} \sphericalangle \mathfrak{K}\mathfrak{M}$$

ist, also die n-Teilung des Winkels.

Die projektive Aufgabe läßt sich nach S. 49 zur projektiven Teilung eines Kegelschnittbogens in Beziehung setzen. Ist der Bogen $\widehat{X_0 X_n}$ durch die Punkte $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ ge-n-telt, so folgt, daß:

$$(IJX_0X_1)^n = (IJX_0X_1)(IJX_1X_2)\ldots(IJX_{n-1}X_n) = (IJX_0X_n)$$

ist.

Bei der dualen Übertragung tritt an Stelle des Bogens $\widehat{X_0 X_n}$ der (projektive) Winkel der Tangenten in X_0 und X_n, die projektive Verallgemeinerung der „curvatura integra".[1])

1) Die Auffassung des Richtungsunterschiedes am Anfang und Ende eines Bogens als Totalkrümmung desselben findet sich schon bei J. H. Lambert, Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung II (Berlin 1770), p. 253; dort auch schon p. 254 die Teilung in Bogen gleicher Totalkrümmung, das duale Analogon zur Teilung in Bogen gleicher Länge.

Auflösungen dieser Aufgaben sind bisher nicht gegeben worden. Doch ergeben sich solche durch projektive Verallgemeinerung der für die metrische Aufgabe gegebenen Lösungen. Von diesen geben wir im folgenden die wichtigsten.

Für die Wurzelziehung kommen die Parabeln und Hyperbeln höherer Art:

$$y^m = x^n, \quad y^m x^n = 1$$

in Betracht, ebenso die Clairautschen[1]) Kurven

$$r^m = \cos^n \varphi, \quad r^m \cos^n \varphi = 1,$$

die höheren Lemniskaten $r_1^m r_2^n = 1$ usw. Mit jeder der genannten Kurven kann man sowohl die m^{te} wie die n^{te} Wurzel aus einem Streckenverhältnis konstruieren.

Denn, da m und n teilerfremd anzunehmen sind, kann man die ganzen Zahlen h, k aus der Diophantischen Gleichung $hm - kn = 1$ bestimmen; hat man nun z. B. $y^{\frac{m}{n}}$ konstruiert, so erhält man daraus

$$\left(y^{\frac{m}{n}}\right)^h = y^{k + \frac{1}{n}} = y^k \cdot \sqrt[n]{y} \quad \text{usw.}$$

Für die Winkelteilung kann man die allgemeinen Strophoiden[2]) benutzen, deren Gleichung in bipolaren Winkelkoordinaten

$$m\varphi + n\psi + p = 0$$

lautet; der spezielle Fall $m = -2n$, $p = 0$ ist der der gleichachsigen Hyperbel (s. S. 38), ein anderer Spezialfall $m = -2n$, $p \neq 0$ liefert die spezielle Strophoide (s. S. 91 Anm. 1). Eine solche allgemeine Strophoide gestattet einen Winkel φ zu n-teln, wenn außerdem der Winkel $\frac{p}{n}$ bekannt ist; denn dann findet man durch die Kurve



$$-\psi = \frac{p}{n} + \frac{m}{n}\varphi$$

und aus $\frac{m}{n}\varphi$ ergibt sich

$$h \cdot \frac{m}{n}\varphi = k\varphi + \frac{1}{n}\varphi, \quad \text{also} \quad \frac{1}{n}\varphi.$$

Ebenso erhält man Winkel-m-teilung, wenn $\frac{p}{m}$ ein gegebener Winkel ist. Die Winkel $\frac{p}{m}$ bzw. $\frac{p}{n}$ werden durch die Richtungen der Tangenten in den beiden Polen gegeben, die man sich konstruieren kann. Mit Rücksicht auf den Winkel der zwei Radien eines Kurvenpunktes

1) A. Clairaut, Misc. Berol. IV (1734); Loria l. c., p. 321.

2) W. W. Johnson, Am. Journ. III (1880), p. 320. E. Barnes, J. Hopk. Univ. Circ. II (1883). Loria l. c., p. 70.

liefert die Kurve auch die $|m-n|$ Teilung, falls noch der Winkel $\frac{p}{m-n}$ bekannt ist. Dieser wird durch die Asymptotenrichtung gegeben. — Zu diesen Kurven gehören insbesondere Schoutes Sektrixkurven[1]): $m\varphi = n(180^0 - \psi)$.

Verlegt man den Scheitel der Winkel ψ in Unendliche, so geht das zugehörige Strahlbüschel in ein Parallelstrahlenbüschel über, und die Gleichung der Kurve kann man dann schreiben:

$$y = m\varphi + p \quad \text{oder} \quad r \sin\varphi = m\varphi + p;$$

es ist die von Chasles[2]) betrachtete verkürzte oder verlängerte Quadratrix, während man für $p = 0$ die Quadratrix des Hippias bzw. Dinostratus erhält.[3]) Diese Kurven gestatten zu jedem Winkel φ eine proportionale Strecke $y - p$ und umgekehrt zu finden, also auch einen beliebigen Winkel in gegebenem Verhältnis zu teilen.

Andere Spezialfälle der Strophoiden sind die Kurven von Hesse[4])

$$r = \frac{\sin(n-1)\varphi}{\sin n\varphi}, \quad r = \frac{\cos(n-1)\varphi}{\cos n\varphi},$$

die Kurven von Oekinghaus[5])

$$r = \frac{\sin\frac{n-2}{2}\varphi}{\sin\frac{n}{2}\varphi}, \quad r = \frac{\cos\frac{n-2}{2}\varphi}{\cos\frac{n}{2}\varphi}$$

die Kurven von Kempe (s. u.) u. a.

Die Rhodoneen

$$r = \sin\frac{m}{n}\varphi$$

liefern ohne weiteres die n-teilung.[6])

Weniger auf der Hand liegt das bei den Sinusspiralen mit der Gleichung

$$r \cos^n \frac{\varphi}{n} = \text{const.};$$

ihre Anwendung zur n-Teilung beruht darauf, daß die Normale der Kurve im Punkte (r, φ) mit dem Radius r den Winkel $\frac{\varphi}{n}$ bildet.

Cevas anomale Zykloiden[7]) hatten wir schon S. 82 erwähnt. Man erhält sie, wenn man den Schenkel $P_0P_1P_3P_5 \ldots$ um P_0 dreht und

1) Journ. de math. spéc. (2) IV, 1885. Loria l. c., p. 325.

2) Aperçu historique (2. Aufl., Paris 1875), p. 32, Anm. Fouret, Nouv. ann. (3) V, 1886. Loria l. c., p. 415.

3) Pappus l. c., p. 250; s. Loria l. c., p. 410.

4) Hesse, Üb. d. Teil. d. Winkels, speziell d. Tris. (Montabaur 1881); Loria l. c., p. 335.

5) Archiv (2) I (1884), p. 87; Loria l. c., p. 339.

6) S. Loria l. c., p. 297.

7) S. Loria l. c., p. 324.

die Strecken $P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_4 = \cdots$ ihre Länge 1 beibehalten. Die Punkte $P_1, P_3, P_5, \ldots$ beschreiben die Cevaschen Zykloiden. Die von P_3 beschriebene liefert Dreiteilung, weil immer

$$P_1P_0P_2 = \frac{1}{3} P_3P_2P_4$$

ist; die von P_5 beschriebene gibt Fünfteilung, weil immer

$$P_1P_0P_2 = \frac{1}{5} P_5P_4P_6$$

ist, usw. Die Gleichungen der Kurven sind:

$$r = 1$$
$$r = 1 + 2\cos 2\varphi$$
$$r = 1 + 2\cos 2\varphi + 2\cos 4\varphi,$$

allgemein

$$r = 1 + 2\cos 2\varphi + 2\cos 4\varphi + \cdots + 2\cos 2k\varphi,$$

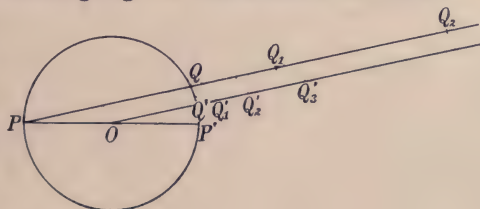
oder

$$r = \frac{\sin(2k+1)\varphi}{\sin\varphi},$$

da man sofort der Figur entnimmt:

$$1 + 2\cos 2\varphi + 2\cos 4\varphi + \cdots + 2\cos 2k\varphi : \sin(2k+1)\varphi = 1 : \sin\varphi.$$

Kempe[1]) verallgemeinert die Erzeugung der Pascalschen Schnecke (s. S. 85): Verlängert man PQ um $QQ_1 = OQ$ und beschreibt bei festem P der Punkt Q den Kreis, dann beschreibt Q_1 die Pascalsche Schnecke; verlängert man PQ_1 um $Q_1Q_2 = OQ_1$, so beschreibt Q_2 die Pascalsche Schnecke zweiter Ordnung usw. Nun ist



$$\angle\, OPQ = OQP = 2\,OQ_1P = 4\,OQ_2P = \cdots,$$

also

$$180^0 - POQ_1 = 3\,OQ_1P, \quad 180^0 - POQ_2 = 5\,OQ_2P \text{ usw.}$$

Damit ist die Anwendung der Kempeschen Kurven zur Teilung in $3, 5, \ldots, 2^k + 1$ Teile vorgezeichnet. Eine zweite Reihe von Kurven erhält man ebenso durch die Punkte $Q_1', Q_2', Q_3', \ldots$, für welche

$$Q_1'Q' = P'Q', \quad Q_2'Q_1' = P'Q_1' \text{ usw.}$$

ist. Infolgedessen ist

$$OP'Q_1' = 3\,OQ_1'P', \quad OP'Q_2' = 7\,OQ_2'P' \text{ usw.},$$

---

1) Nieuw Archiv voor Wiskunde (2) I (1894). Mém. de Liège (2) XX (1898). Loria l. c., p. 339.

was zur Teilung in $2^k - 1$ Teile zu benutzen ist. Nun ist für irgendeine Primzahl p stets

$$2^p = (1+1)^p = 1 + \binom{p}{1} + \binom{p}{2} + \cdots + \binom{p}{1} + 1,$$

also $2^p - 2$ durch p teilbar; also ist p entweder in $2^{\frac{p-1}{2}} + 1$ oder in $2^{\frac{p-1}{2}} - 1$ als Faktor enthalten, die Teilung in p Teile also durch eine der obigen Kurven ausführbar. Allgemeiner ist jede Zahl n in einer der Zahlen $2^k \pm 1$ als Teiler enthalten.

Eine gezeichnet vorliegende *algebraische* Kurve kann eine dieser beiden Aufgaben natürlich nur für bestimmte Werte von n lösen. Will man diese Aufgaben für beliebiges n lösen können, so muß man zu *transzendenten* Kurven greifen.

Kapitel II.

Transzendente Konstruktionen.

Transzendente Kurven zur Winkelteilung

sind:

1. *Die Archimedische Spirale*[1]), deren Gleichung in Polarkoordinaten lautet:

$$r_\varphi = r_1 \cdot \varphi.$$

Man erhält den Winkel $\frac{\varphi}{n}$ als den Winkel, der zum Radius

$$r_{\frac{\varphi}{n}} = \frac{1}{n} \cdot r_\varphi$$

gehört.

2. *Die hyperbolische Spirale*[2]):

$$r_\varphi \cdot \varphi = r_1.$$

Man erhält $\frac{\varphi}{n}$ als Winkel zum Radius:

$$r_{\frac{\varphi}{n}} = n \cdot r_\varphi.$$

3. *Die parabolische Spirale*[3]):

$$r_\varphi^{\,2} = r_1^{\,2} \cdot \varphi.$$

---

1) Archimedes, Περὶ ἑλίκων, ed. Torelli, p. 217. Pappus l. c., p. 234. Loria l. c., p. 426. Über die Anwendung zur Winkelteilung berichtet Proklus (ed. Friedlein), p. 272.

2) Varignon, Mém. de Paris 1704 (Paris 1722); Joh. Bernoulli, Opera omnia (Lausanne und Genf 1742) I, p. 480. Loria l. c., p. 426.

3) Jac. Bernouilli, Acta erud. Jan. 1691, p. 13 = Opera I, p. 431; Joh. Bernouilli, Acta erud. Jan. 1691, p. 13 = Opera I, p. 46. Loria l. c., p. 439.

Man erhält $\frac{\varphi}{n}$ als Winkel zum Radius:

$$r_{\frac{\varphi}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}} \cdot r_\varphi.$$

4. *Der Lituus*[1]):

$$r_\varphi^{\,2} \cdot \varphi = r_1^{\,2}.$$

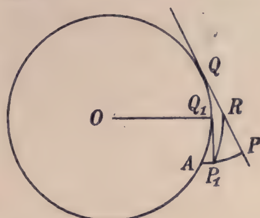
Man erhält $\frac{\varphi}{n}$ als Winkel zum Radius:

$$r_{\frac{\varphi}{n}} = \sqrt{n} \cdot r_\varphi.$$

5. *Die Kreisevolvente*[2]):

$$\varphi = \sqrt{r^2 - 1} - \arccos \frac{1}{r}.$$

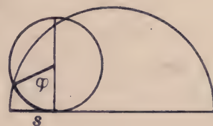
Um den Bogen $\widehat{AQ}$ zu n-teln, sei $QR = \frac{1}{n} QP$, und der Kreis um O mit OR schneide die Evolvente in P_1, die Tangente von P_1 an den Kreis berühre in Q_1, dann ist:



$$\widehat{AQ_1} = \frac{1}{n} \widehat{AQ}.$$

6. *Die Zykloide*[3]):

Man kann zu gegebenem φ den Zykloidenpunkt, also s konstruieren, dann zu $\frac{1}{n} s$ den zugehörigen Zykloidenpunkt, also $\frac{\varphi}{n}$.



7. *Die Sinuslinie*[4]) (Tschirnhausens Quadratrix[5])) mit der Gleichung:

$$y = \sin kx.$$

Zu gegebenem Kreisbogen $\widehat{OP} = \varphi$ des Kreises $M(MO)$ findet man durch die Parallele $[PQ]$ zur X-Achse $[OM]$ den Kurvenpunkt Q mit der Abszisse:

$$x = \frac{1}{k} \varphi.$$

Dann umgekehrt zu $\frac{1}{n} x$ den Kurvenpunkt Q_1 und dazu durch die Parallele $[Q_1 P_1]$ den Punkt P_1 des Kreises, also den Winkel:

$$P_1 M O = \frac{1}{n} \varphi.$$

---

1) Côtes. Vgl. Loria l. c., p. 448.

2) De la Hire, Mém. de l'ac. des sciences 1706, p. 369; Diderot, Mémoires sur diff. suj. math. (Paris 1748); Loria l. c., p. 499.

3) Galilei, Opere ed. Albèri (Florenz 1856), p. 366. Loria l. c., p. 460. Einen Zykloidenzirkel gibt M. Spott an, s. Schlöm. Ztschr. 36 (1891), Hist.-lit. Abt., p. 190.

4) Leibniz ed. Gerhardt IV, p. 18; II, p. 195. Loria l. c., p. 538.

5) Medicina mentis (Amstelod. 1686), p. 115 $\left(\text{bei Tschirnhausen ist } k = \frac{\pi}{2}\right)$. Loria l. c., p. 416.

8. *Die Quadratrix des Hippias und Nicomedes*[1]):

$$x = \frac{\varphi}{\varphi_0}.$$

Der Erfolg beruht in allen diesen Fällen darauf, daß man zu jedem Winkel eine proportionale Strecke und umgekehrt konstruieren kann. Die Winkelteilung wird also vermittels einer proportionalen Rektifikation eines Bogens und proportionalen Arkufikation einer Strecke auf eine Streckenteilung zurückgeführt.

Transzendente Kurven zur Wurzelausziehung.

1. *Die logarithmische Linie* (Logistica)[2]):

$$y = \ln x.$$

Man findet:

$$\ln \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \ln x = \frac{1}{n} y$$

durch n-Teilung der zu x gehörigen Ordinate y und Aufsuchung der zu $\frac{1}{n} y$ gehörigen Abszisse $\sqrt[n]{x}$.

2. *Die Kettenlinie*[3]):

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cos \operatorname{hyp} x;$$

denn $\ln k$ ist die Abszisse zur Ordinate

$$\frac{k + \frac{1}{k}}{2} \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt[n]{k} + \sqrt[n]{\frac{1}{k}}}{2}$$

ist die Ordinate zur Abszisse $\ln \sqrt[n]{k} = \frac{1}{n} \ln k$.

Der Erfolg beruht darauf, daß man zu jeder Zahl den Logarithmus und zu jedem Logarithmus den Numerus konstruieren kann; die Wurzelausziehung wird also durch Logarithmieren und Exponieren auf Streckenteilung zurückgeführt.

Diese Kurven sind natürlich nicht mehr ganz angemessene Konstruktionsmittel der Aufgaben der Wurzelziehung und Winkelteilung, da sie, darüber hinausgehend, die Auflösung transzendenter Aufgaben ermöglichen. Man muß nunmehr umgekehrt nach dem wahren Konstruktionsbereich dieser Hilfsmittel fragen. Nimmt man zu einer

---

1) S. o. Im Altertum wurde nur der Fall $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ betrachtet. Über ihre Benutzung zur Winkelteilung berichtet Proklus (ed. Friedlein), p. 272.

2) S. Loria l. c., p. 542.

3) Jacob Bernouilli, Acta erudit., 1691 = Opera, p. 499. S. Loria l. c., p. 574.

dieser Kurven noch Lineal und Zirkel hinzu, so werden neue transzendente Aufgaben lösbar; z. B. liefert die Gerade:

$$y = ax + b,$$

und die Sinuskurve:

$$y = \sin x,$$

die graphische Auflösung der Keplerschen Gleichung[1]):

$$\sin x = ax + b,$$

eine Auflösung, die sehr leicht die Anzahl und die Grenzen der reellen Wurzeln dieser Gleichung nach den Werten von a und b aufzufinden gestattet.

Analog sind die Gleichungen

$$\ln x = ax + b, \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2} = ax + b$$

usw. zu diskutieren.

Fernere Aufgaben und Fragen, die sich hier anschließen, sind: Alle diejenigen Kurven n^{ter} Ordnung zu definieren, welche die n^{te} Wurzelziehung oder welche die Winkel-n-teilung oder welche beide Aufgaben mit dem Lineal allein zu lösen ermöglichen.

Dieselbe Frage für die Kurven niedrigster Ordnung, insbesondere für zyklische Kurven, wenn Lineal und Zirkel oder nur der Zirkel gebraucht werden soll.

Ermöglicht eine transzendente Kurve, welche das Wurzelausziehen für *jeden* ganzzahligen Wurzelindex vermittelt, auch das Logarithmieren?

Die interszendenten Konstruktionen.

Als solche Operationen sind zu bezeichnen die Potenz mit einem beliebigen *nicht* rationalen Exponenten: x^y und der Logarithmus für eine beliebige Basis. Die erste kommt vermittels:

$$x^y = e^{y \cdot \ln x},$$

die zweite vermittels:

$$\log_x (y) = \frac{\log \operatorname{nat} y}{\log \operatorname{nat} x}$$

1) L. Euler (Introductio in analysin infinitorum, Lausanne 1748, II, Kap. 22, p. 304 ff.; Considerationes cyclometricae, Novi Comm. Acad. Petrop. XVI, 160) löst solche Gleichungen, wie

$$2 \sin x = x, \quad \frac{\pi}{2} - x = \sin x$$

u. dgl., um so eine Art transzendenter Quadratur zu versuchen; hätte eine solche Gleichung eine Wurzel $\frac{m}{n}\pi$, so wäre damit der Charakter der Zahl π erkannt worden.

auf das natürliche Logarithmieren und Exponieren zurück, und diese Operationen werden durch die Gleichungen:

$$e^{\xi + i\eta} = e^{\xi}(\cos\eta + i\sin\eta),$$

$$\ln(\xi + i\eta) = \ln\sqrt{\xi^2 + \eta^2} + i \cdot \operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{\xi}$$

in allen Fällen auf folgende vier zurückgeführt:

Das Logarithmieren und Exponieren mit reellen positiven Größen, das Rektifizieren eines Bogens, das Arkufizieren einer Strecke.

Die Konstruktionen werden besonders einfach, wenn man als logarithmische Linie die Kurve

$$e^x = \sqrt{x^2 + y^2}$$

nimmt.

Diese Art Konstruktionen mit Einschluß der rationalen Operationen faßt man unter der Bezeichnung „*graphisches Rechnen*"[1]) zusammen; sie bilden einen speziellen Fall der

Nomographie.[2])

In dieser wird nicht nur *eine* Kurve als gezeichnet vorliegend angenommen, sondern eine Schar von Kurven oder auch zwei einander schneidende Scharen von Kurven, und an Stelle des Lineals tritt eine zweite (durchsichtige) auf der ersten verschiebbare Ebene, auf welcher ebenfalls Systeme von Kurven gezeichnet sind.

---

1) Vgl. hierzu: B. E. Cousinery, Le calcul par le trait, Paris 1839. H. Eggers, Grundzüge einer graphischen Arithmetik, Progr. Schaffhausen 1865. E. Jäger, Das graphische Rechnen, Diss. Speyer 1867. J. Schlesinger. Vorträge über graphisches Rechnen und Graphostatik, Wien 1868/69. K. Culmann, Die graphische Statik, Zürich 1866, 2. Aufl. 1875. A. Favaro, Sulle prime operazioni del calcolo grafico, Venezia 1872. L. Cremona, Elementi di calcolo grafico, Torino 1874, deutsch von M. Curtze, Elemente des graphischen Kalkuls, Leipzig 1875, engl. von Th. Hudson Beare, Graphical statics, Oxford 1890. K. von Ott, Das graphische Rechnen und die graphische Statik I, 4. Aufl., Prag 1879. J. Wenck, Die graphische Arithmetik und ihre Anwendungen auf Geometrie, Berlin 1879. A. Favaro, Lezioni di statica grafica, Padova 1877, frz. von P. Terrier, Leçons de statique graphique, 2e partie, calcul graphique, Paris 1885. A. Steinhauser, Die Elemente des graphischen Rechnens, Wien 1885. J. J. Prince, Graphic arithmetic and statics, London 1893. O. Bürklen, Graphisches Rechnen u. graph. Darstellungen, Progr. Gmünd 1899. Mehmke, Numerisches Rechnen, Enz. d. Math. I, p. 1006.

2) Ch. A. Vogler, Anleitung zum Entwerfen graphischer Tafeln, Berlin 1877. M. D'Ocagne, Nomographie, Paris 1891. M. D'Ocagne, Ann. d. Conservatoire des arts et métiers (2) 5, 6, 1893/94. M. D'Ocagne, Conférences sur la nomographie, Paris 1894. M. D'Ocagne, Traité de Nomographie, Paris 1899. G. Pesci, Rivista marittima, VIII, IX 1899; II 1900. Fr. Schilling, Über die Nomographie von d'Ocagne, Leipzig 1900. R. Soreau, Mém. d. l. soc. d. ing. civ. d. France Bull. d'août 1901. Mehmke, Numerisches Rechnen, Enz. d. Math. I, p. 1024.

Auch hier ist wieder die Frage nach dem Konstruktionsbereich aufzuwerfen.

Ist auf der festen Tafel das doppelte System von Kurven

$$x = f(p, q), \quad y = g(p, q)\text{ [1]},$$

auf der beweglichen Tafel das einfache System

$$\Phi(\xi, \eta) = \lambda$$

verzeichnet, und bringt man die Tafeln so zur Deckung, daß der Anfangspunkt der zweiten in den Punkt $x_0 y_0$ der ersten fällt und die ξ-Achse gegen die x-Achse noch um den Winkel φ gedreht ist, so besteht zwischen den Werten p, q eines Punktes in der festen Tafel und dem Werte λ des ihn deckenden Punktes der beweglichen die Gleichung:

$$\lambda = \Phi(-x_0 + f(p,q) \cos\varphi + g(p,q) \sin\varphi,$$
$$-y_0 - f(p,q) \sin\varphi + g(p,q) \cos\varphi).$$

Demnach können Beziehungen zwischen sechs Variablen $\lambda x_0 y_0 p q \varphi$ durch dieses Hilfsmittel dargestellt werden, aber nur solche, welche sich auf diese spezielle Form bringen lassen. Die verschiedenen Aufgaben, die dann eintreten können, sind die folgenden:

1. x_0, y_0, p, q, φ sind gegeben, λ gesucht. Man lege die Tafel mit ihrem Nullpunkt auf den Punkt $x_0 y_0$ der festen, gebe ihr die Drehung φ und lese den Parameter λ der durch den Punkt (p, q) gehenden Kurve Φ ab.

2. λ, x_0, y_0, p, q gegeben, φ gesucht. Man lege den Nullpunkt wieder auf $x_0 y_0$, drehe so lange, bis die Kurve $\Phi(\xi, \eta) = \lambda$ durch den (p, q)-Punkt geht; und lese den Drehwinkel φ ab.

3. y_0 (bzw. x_0) gesucht. Man lege den Nullpunkt auf die im Abstande x_0 zur Y-Achse gezogene Parallele, drehe um φ, verschiebe in vertikaler Richtung, bis die Kurve $\Phi(\xi, \eta) = \lambda$ durch den Punkt (p, q) geht; dann lese man y_0 ab.

4. p (oder q) gesucht. Man lege den Nullpunkt auf (x_0, y_0), drehe um φ, suche den Schnittpunkt der Kurve $\Phi(\xi, \eta) = \lambda$ mit der Kurve

$$x = f(p, q),$$
$$y = g(p, q),$$

die dem gegebenen q entspricht; das zugehörige p liest man ab.

Die Gleichung zwischen $\lambda, x_0, y_0, p, q, \varphi$ ist namentlich in *der* Weise speziell, daß sie aus Funktionen von je *zwei* Argumenten auf-

1) D. h. also jedem Punkte werden außer den zwei rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten x, y zwei „krummlinige" Koordinaten p, q beigelegt. Diese Auffassung und Bezeichnung stammt von G. Lamé, der sie in seinen „Coordonnées curvilignes" (Paris 1859) einführte.

gebaut ist; $\lambda - \Phi$ ist eine Funktion von λ und Φ, ferner Φ eine Funktion von zwei Argumenten, $x_0 + (f \cos\varphi + g \sin\varphi)$ ist die Summe von zwei Argumenten, deren eines x_0 ist, ebenso ist das andere $f\cos\varphi + g\sin\varphi$ eine Summe von zwei Argumenten; ferner sind $f\cos\varphi$, $g\sin\varphi$ Produkte von zwei Argumenten und f, g Funktionen von zwei Argumenten p, q. Auf diese Beschränktheit der durch „Nomogramme"[1]) lösbaren Gleichungen hat Hilbert[2]) hingewiesen und daran die interessante Frage geknüpft, ob eine allgemeine Gleichung siebenten Grades (für den fünften und sechsten ist es leicht einzusehen) durch eine Kette stetiger Funktionen von nur zwei Argumenten lösbar sei. Hilbert hat gefunden, daß es überhaupt analytische Funktionen gibt, die nicht durch endlich-malige Verkettung von Funktionen von nur zwei Argumenten erhalten werden können.

Kapitel III.

Imaginäre Elemente. Realitätskriterien. Anzahlgeometrie.

Imaginäre Elemente.[3])

Imaginäre Punktpaare haben wir bereits früher (S. 5 u. 44) eingeführt als gemeinsame harmonische zu zwei sich trennenden Punktpaaren.[4]) Bezeichnen wir das gemeinsame harmonische Paar der beiden Paare AA', BB' mit XX', so wollen wir diese beiden Punkte in der Weise durch die Bezeichnung trennen, daß wir:

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ A' & B' \end{pmatrix}, \qquad X' = \begin{pmatrix} B & A \\ B' & A' \end{pmatrix}$$

setzen, also jeden der beiden Punkte einer Reihenfolge der gegebenen *Paare* zuordnen. Die entsprechende Festsetzung soll für imaginäre Geradenpaare getroffen werden. Dann sind die Aufgaben zu lösen:

1. einen reellen und einen imaginären Punkt zu verbinden;
2. zwei imaginäre Punkte zu verbinden;
3. den Schnittpunkt einer reellen und einer imaginären Geraden;
4. den Schnittpunkt von zwei imaginären Geraden zu konstruieren.

---

1) Von Schilling eingeführt.

2) Mathematische Probleme. Gött. Nachr. 1900, Heft III.

3) Vgl. hierzu: August, Untersuchungen über das Imaginäre in der Geometrie. Programm Berlin 1872.

4) *Diese* Definition eines imaginären Paares durch *irgend* zwei zu ihm harmonische ist für die Konstruktionen geeigneter als die v. Staudtsche (Beiträge zur Geometrie der Lage, Nürnberg 1856, § 7, p. 76), bei der die Paare noch unter sich harmonisch sind, und auch geeigneter, als die von Lüroth (Math. Ann. 11, 1877, p. 84; 13, 1878, p. 305) und F. Klein (Gött. Nachr. 1872, p. 273 = Math. Ann. 22, 1883, p. 242) als äquianharmonisches (s. S. 3) Paar zu drei reellen Punkten (bzw. Graden). Vgl. hierzu Vahlen, Abstrakte Geometrie (Leipzig 1905), p. 164.

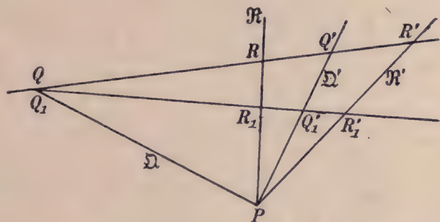
Die Auflösung der Aufgaben (1) und (3) ergibt sich ohne weiteres. Aufgabe (2) wird, wie folgt, gelöst:

Die beiden imaginären Punkte seien

$$X = \begin{pmatrix} A\ , B \\ A', B' \end{pmatrix}, \qquad X_1 = \begin{pmatrix} A_1\ , B_1 \\ A_1', B_1' \end{pmatrix},$$

der Schnittpunkt der beiden Geraden $[ABA'B']$ und $[A_1B_1A_1'B_1']$ werde mit $Q = Q_1$ bezeichnet. Dann konstruiere man Q' als vierten harmonischen Punkt zu A, B, Q und Q_1' als vierten harmonischen Punkt zu A_1, B_1, Q_1; ferner RR' harmonisch zu QQ' und dem gemeinsamen harmonischen Paar zu AA', BB' (s. S. 48), ebenso R_1R_1' harmonisch zu Q_1Q_1' und dem gemeinsamen harmonischen Paar zu A_1A_1', B_1B_1'. Dann ist:

$$X = \begin{pmatrix} Q\ R \\ Q'\ R' \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad X_1 = \begin{pmatrix} Q_1\ R_1 \\ Q_1'\ R_1' \end{pmatrix}.$$



Folglich ist die gesuchte Gerade (s. Fig.):

$$[XX_1] = \begin{bmatrix} \mathfrak{Q}\ \mathfrak{R} \\ \mathfrak{Q}'\ \mathfrak{R}' \end{bmatrix}.$$

Dual entsprechend löst man Aufgabe (4).

Es muß noch entschieden werden, wann zwei imaginäre Punktpaare identisch sind. Ist das erste Paar harmonisch zu den Paaren AA', BB', das zweite Paar harmonisch zu den Paaren CC', DD', so haben diese vier Paare im Falle der Identität der beiden imaginären Paare ein gemeinsames harmonisches Paar, was mit Hilfe des Involutionssatzes vom Viereck (s. S. 7) entschieden werden kann. — Das Entsprechende gilt von imaginären Geradenpaaren.

Bei den quadratischen Aufgaben wird noch erforderlich, die Schnittpunkte einer imaginären Geraden mit einem Kegelschnitt zu bestimmen, und die dual entsprechende. Die imaginäre Gerade sei:

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{A}\ \mathfrak{B} \\ \mathfrak{A}'\ \mathfrak{B}' \end{bmatrix}.$$

Schneidet man die vier Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ mit einer Geraden $\mathfrak{G}$ in den Punkten A, A', B, B' und mit der zu $\mathfrak{G}$ in bezug auf den Kegelschnitt konjugierten Geraden $\mathfrak{G}_1$ (s. S. 19) in den konjugierten Punkten A_1, A_1', B_1, B_1', dann sind die beiden Punkte

$$\begin{pmatrix} A\ B \\ A'\ B' \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} A_1\ B_1 \\ A_1'\ B_1' \end{pmatrix}$$

ein Paar konjugiert imaginärer Punkte zu dem gesuchten Schnitt-

punktepaar. Ebenso konstruiert man ein zweites; durch diese zwei Paare ist das gesuchte bestimmt.

Bei den kubischen Konstruktionen sind noch ins Auge zu fassen die Schnittpunkte des gegebenen Kegelschnitts mit einem durch fünf Punkte bestimmten, falls sich unter diesen imaginäre befinden.[1])

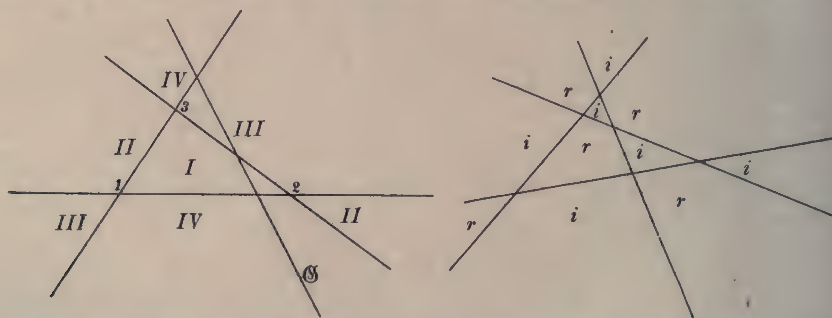
Realitätskriterien.

Bei Konstruktionsaufgaben höheren als ersten Grades ist stets zu untersuchen, bei welcher Lage der gegebenen Elemente die zu konstruierenden Elemente reell, bei welcher sie imaginär sind, bzw. wieviel reelle und wieviel imaginäre Lösungen es gibt.

Als *Fundamentalkriterium* ist einzuführen: „Das gemeinsame harmonische zu zwei Paaren ist reell oder imaginär, je nachdem die beiden Paare sich nicht trennen oder trennen.“ Hierauf sind alle anderen Unterscheidungen zurückzuführen.

Auf Grund desselben und des Involutionssatzes S. 50, 51 ergibt sich für die Aufgabe: „Durch vier Punkte und eine Tangente einen Kegelschnitt zu bestimmen“ die folgende Unterscheidung:

Hat man vier Punkte, von denen je drei nicht in einer Geraden liegen, so kann der vierte Punkt mit einer beliebigen Geraden 𝔊 in bezug auf das durch die drei anderen Punkte bestimmte Dreieck in zwei verschiedenen Lagen liegen. Durch drei Punkte wird nämlich die Ebene in vier Gebiete geteilt, die in der Figur mit I, II, III, IV bezeichnet sind. Eine beliebige Gerade 𝔊 kann nur durch drei von diesen vier Gebieten gehen, während das vierte von ihr nicht getroffen wird. Je nachdem keiner der vier Punkte in dem von 𝔊



nicht getroffenen Gebiet der drei andern liegt oder nicht, sagt man, die vier Punkte liegen in elliptischer oder in hyperbolischer Lage in bezug auf die Gerade 𝔊. Bei elliptischer Lage sind beide Kegelschnitte reell, bei hyperbolischer Lage beide imaginär. Die Richtigkeit ergibt sich auch leicht, wenn man 𝔊 in das Unendliche projiziert.

1) Vgl. insbesondere Smith, Ann. di math. (2) 3 (1869 u. 1870) p. 112.

Sind von den vier Punkten zwei konjugiert imaginär, so sind die beiden Kegelschnitte reell oder imaginär, je nachdem, ob die zwei reellen Punkte durch die gegebene Gerade und die Gerade der zwei konjugiert imaginären Punkte nicht getrennt oder getrennt werden. Man erkennt dies z. B., indem man die Figur projektiv so transformiert denkt, daß die zwei imaginären Punkte die beiden Kreispunkte werden. Wird auch das andere Punktepaar imaginär, so sind die beiden Kegelschnitte stets reell.

Für die Bestimmung eines Kegelschnitts aus vier Tangenten und einem Punkt enthält die zweite Figur S. 116 die Entscheidung darüber, wann die beiden Kegelschnitte reell, wann sie imaginär sind. Die Gebiete sind mit i oder r bezeichnet, je nachdem, ob nach Annahme des Punktes in ihnen die Kegelschnitte imaginär oder reell sind. Die drei r-Gebiete stoßen an alle vier, die vier i-Gebiete an je drei der vier Geraden an.

Sind von den zwei Tangenten zwei konjugiert imaginär, so sind die beiden Kegelschnitte reell oder imaginär, je nachdem, ob die beiden reellen Tangenten durch den gegebenen Punkt und den Schnittpunkt der gegebenen imaginären Tangenten nicht getrennt oder getrennt werden.

Sind auch die beiden anderen Tangenten konjugiert imaginär, dann sind die beiden Kegelschnitte stets reell.

Für den metrischen Fall ergibt sich daraus, da ein Brennpunkt der Schnittpunkt von zwei durch die Kreispunkte gehenden Tangenten ist (s. S. 41), daß die zwei durch einen Brennpunkt, einen Punkt und zwei Tangenten bestimmten Kegelschnitte reell oder imaginär sind, je nachdem der Brennpunkt von dem anderen Punkt durch die zwei Tangenten nicht getrennt oder getrennt wird; und aus dem zweiten Fall, daß durch die zwei reellen Brennpunkte und einen *Punkt* stets zwei reelle Kegelschnitte, nämlich eine Ellipse und eine Hyperbel bestimmt sind. Die zwei reellen Brennpunkte und eine *Tangente* bestimmen eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem ob die Brennpunkte durch die Tangente und die unendlich ferne Gerade nicht getrennt oder getrennt werden.

Für die Bestimmung eines Kegelschnitts aus drei Punkten und zwei Tangenten[1]) ergibt sich das Kriterium: Es sind alle vier Kegelschnitte reell oder alle vier imaginär, je nachdem, ob die drei gegebenen Punkte durch die zwei gegebenen Geraden nicht getrennt oder getrennt werden. Werden zwei der drei gegebenen Punkte konjugiert-imaginär, so werden von den vier Kegelschnitten zwei reell, zwei imaginär; man erkennt das am einfachsten, indem man die zwei ima-

1) S. Schröter-Steiner, Kegelschnitte, 2. Aufl. (Leipzig 1876), p. 236; 3. Aufl. (Leipzig 1898), § 40.

ginären Punkte in die Kreispunkte projiziert. Denn durch zwei Tangenten und einen Punkt sind zwei reelle Kreise bestimmt.

Durch drei Punkte (von denen bzw. zwei konjugiert imaginär sind) und zwei konjugiert imaginäre Tangenten werden stets vier (bzw. zwei[1])) reelle Kegelschnitte bestimmt.

Durch zwei Punkte und drei Tangenten sind vier reelle oder vier imaginäre Kegelschnitte bestimmt, je nachdem, ob die zwei Punkte durch die drei Tangenten nicht getrennt oder getrennt sind. Sind zwei von den drei Tangenten konjugiert imaginär, so gibt es zwei reelle, zwei imaginäre Kegelschnitte. Durch zwei konjugiert imaginäre Punkte und drei Tangenten (unter denen bzw. zwei konjugiert imaginäre sind), werden stets vier (bzw. zwei) reelle Kegelschnitte bestimmt.

Über Kegelschnitte aus Mittelpunkt und drei Punkten oder Tangenten s. Steiner.[2])

Von metrischen Problemen ist das Apollonische unter diesem Gesichtspunkte von Stoll[3]) behandelt worden. Er zeigt, daß immer nur 0, 4 oder 8 reelle Lösungen existieren, und wie diese Fälle von der Lage der drei gegebenen Kreise abhängen.

Aufgaben:

1. Wieviel reelle und imaginäre Kegelschnitte gibt es, die einem gegebenen Dreieck um- (bzw. ein-)beschrieben, einem gegebenen Kegelschnitt ähnlich sind und eine gegebene Zentrale haben?

2. Vier Gerade $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ im Raume haben zwei Transversalen; ein rein projektives Kriterium dafür aufzustellen, daß diese reell oder daß sie imaginär sind.

Anzahlgeometrie.[4])

Bei Konstruktionsaufgaben höheren Grades bietet schon die Bestimmung der *Anzahl* der möglichen Lösungen Schwierigkeiten. Algebraisch kommt diese Frage darauf hinaus, den Grad eines Gleichungssystems, d. h. die Anzahl der Lösungen desselben zu be-

---

1) Über die Konstruktion in diesem Fall s. K. Rohn, D. Math. Ver. 17 (1908), p. 94.

2) Crelles J. 30 (1846), p. 97 = Werke II, p. 327.

3) Math. Ann. 6 (1873), p. 612.

4) Vgl. namentlich H. Schubert, Kalkül der abzählenden Geometrie. Leipzig 1879. Zeuthen, Kopenhag. Abh. IV (1873). Anzahlgeometrische Probleme in bezug auf Punkte, Gerade, Ebenen s. bei C. A. Bretschneider, Schlöm. Ztschr. 6 (1861), p. 311; in bezug auf Kegelschnitte, die durch Punkte, Tangenten, Normalen bestimmt sind, s. J. Steiner, Crelles J. 55 (1858), p. 356 = Werke II, p. 661 (speziell 683). B. Sporer, Schlöm. Ztschr. 35 (1890), p. 237, 293. A. Wiman, Schlöm. Ztschr. 40 (1895), p. 296. Über Kegelschnitte, welche Kurven vierten Grades vierpunktig berühren (u. dgl.), s. J. Steiner, Crelles J. 45 (1853), p. 183 = Werke II, p. 439.

stimmen. Ein Fall, in welchem die sämtlichen Grade gleich 2 sind und der Grad offenbar das Produkt der Grade der einzelnen Gleichungen ist, ist dasjenige Problem, welches im n-dimensionalen Raum dem Problem der zwei Transversalen zu vier geraden Linien analog ist. Für diesen Fall kann man das vollständige System von Gleichungen aufstellen[1]) und alle Gleichungen auf den zweiten Grad zurückführen.[2]) Für den allgemeineren Fall, daß die Gleichungen von höherem Grade sind, läßt sich auf Grund einer sehr allgemeinen Gradbestimmung[3]) ein allgemeines Korrespondenzprinzip aufstellen, das für viele geometrische Fragen mit Nutzen angewandt werden kann; z. B. ergibt sich daraus der Satz: Sind g_0 und h_0 die Ordnungen, g_1 und h_1 die Klassen zweier ebenen algebraischen Kurven, so ist die Verbindungsgerade zweier Punkte dieser Kurven und der zugehörige Tangentenschnittpunkt

$$(g_0h_0 + g_0h_1 + g_1h_0 + g_1h_1) \text{ mal}$$

konjugiert in bezug auf eine gegebene Linie zweiter Klasse.

Degeneriert diese in das Kreispunktepaar, so folgt, daß die beiden Kurven im allgemeinen

$$g_0h_1 + g_1h_0 + g_1h_1$$

gemeinsame Normalen haben.

Entsprechende Sätze gelten für algebraische Flächen und höhere Mannigfaltigkeiten.[4])

Hierher gehören ferner die Anzahlbestimmung der Doppel- und Rückkehrpunkte und der Doppel- und Wendetangenten[5]) algebraischer Kurven, die Plückerschen Formeln[6]), die Kleinsche Formel[7]) für reelle und imaginäre Singularitäten u. dgl.

---

1) Vahlen, Crelles J. 112 (1893), p. 306.

2) Pascal, Acc. Linc. mem. (4) V (1888), p. 375; s. auch Pascal, Die Determinanten (deutsch von Leitzmann, Leipzig 1900), p. 121.

3) Vahlen, Crelles J. 113 (1894), p. 348. Ein spezielleres Korrespondenzprinzip benutzt Chasles in den Comptes rendus 1864 u. folg. Jahre; s. ferner Schubert, Math. Ann. 12 (1877), p. 180. Salmon, Geom. of three dim. (1865), deutsch von Fiedler, 3. Aufl. II (Leipzig 1880), p. 620. Zeuthen, Comptes rendus, 1874.

4) Vahlen, Crelles J. 118 (1897), p. 251. Die Normalenzahl von einem unendlich fernen Punkte bestimmte schon Salmon (Cambr. and Dubl. Math. J. III, 1887, p. 47), von einem endlich fernen Punkte R. Sturm (Math. Ann. 7, 1874, p. 567).

5) Plücker, System der analytischen Geometrie, Berlin 1835, p. 290; Crelles J. 12 (1834), p. 105 = Abh. I, p. 298. C. G. J. Jacobi, Crelles J. 40 (1850), p. 237 = Werke III, p. 517. O. Hesse, Crelles J. 40 (1850), p. 260 u. 316 = Jacobis Werke III, p. 543 = Hesses Abh. p. 257.

6) Plücker, Liouv. J. 2 (1837) p. 11 = Abh. I p. 334; Theorie der algebraischen Kurven, Bonn 1839.

7) F. Klein, Erl. Ber. 1875, Math. Ann. 10 (1876), p. 199.

Vor allem ist aber der besondere Kalkül und die besondere Methode zu erwähnen, die Schubert a. a. O. für Fragen dieser Art geschaffen hat. Die Methode besteht insbesondere in der Anwendung des *Prinzips von der Erhaltung der Anzahl*[1]): Wenn ein algebraisches Gebilde so viel Bedingungen unterworfen wird, daß nur eine endliche Anzahl von Gebilden der betreffenden Art existieren, so wird diese Anzahl entweder unendlich oder bleibt — bei richtiger Zählung — unverändert, wenn die Bedingungen irgendwie spezialisiert werden. Das ist ein Korollar des Fundamentalsatzes der Algebra, das aber in dieser Allgemeinheit nicht ohne Vorsicht benutzt werden darf. Soll z. B. die Anzahl der Transversalen zu vier gegebenen Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ bestimmt werden, so gebe man zweien ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$) die spezielle Lage, daß sie sich schneiden. Dann gibt es offenbar zwei und nur zwei Transversalen, nämlich eine durch den Punkt ($\mathfrak{A}\mathfrak{B}$), eine in der Ebene $\{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\}$; also gibt es auch bei allgemeiner Lage genau zwei, in speziellen Fällen (z. B. für vier Tetraederhöhen[2])) unendlich viele.

Der von Schubert eingeführte Kalkül besteht in der *Symbolik der Bedingungen*: Den Grundbedingungen, aus denen sich alle anderen zusammensetzen, werden bestimmte feste Symbole beigelegt und mit diesen Symbolen ähnlich wie im Logikkalkül[3]) gerechnet[4]). Z. B. bedeuten g, g_p, g_e die Bedingungen, daß eine Gerade durch eine gegebene Gerade bzw. durch einen gegebenen Punkt gehen bzw. in einer gegebenen Ebene liegen soll; und g^2, gg_p das eine Gerade zwei gegebene Gerade schneiden bzw. eine gegebene Gerade schneiden *und* durch einen gegebenen Punkt gehen soll; und $g^2 + g_p$, daß eine Gerade *entweder* durch zwei gegebene Gerade *oder* durch einen gegebenen Punkt gehen soll u. dgl.

Schließlich wird noch die Anzahl von Gebilden, welche einer bestimmten Bedingung genügen, mit dem Symbol dieser Bedingung[5]), unbestimmte Bedingungen mit $x, y, \ldots$ usw. bezeichnet. Es stellt sich heraus, daß in dem so skizzierten Kalkül Addition, Subtraktion und Multiplikation gelten, aber im allgemeinen nicht Division.

Mit diesen Hilfsmitteln gelingt es z. B. leicht zu zeigen, daß die

---

1) Schubert, Gött. Nachr. (1874), p. 274, (1875, 1877); Math. Ann. 10 (1876), p. 23, 351; 13 (1878), p. 430. In speziellen Fällen wurde das Prinzip auch angewandt von L. Marcks, Math. Ann. 5 (1872), p. 27, Sturm, Math. Ann. 7 (1874), p. 567, Jonquières, Brioschi Ann. VIII, p. 312, Hurwitz, Math. Ann. 15 (1879), p. 8, Vahlen, Crelles J. 113 (1894), p. 348.

2) Bobillier, Gerg. Ann. 18 (1827 u. 1828), p. 320, Nr. 16; Steiner, Crelles J. 2 (1827), p. 96, Nr. 10 = Werke I, p. 128.

3) Über diese auf Lambert und Boole zurückgehende Disziplin vgl. namentlich E. Schröder, Logikkalkül, Leipzig 1877, Algebra der Logik, Leipzig 1890—95.

4) Das Produkt von Bedingungen benutzte schon Halphen, Compt. rend. 76, p. 1074.

5) Schubert, Gött. Nachr. 1874.

Anzahl der Kegelschnitte, welche fünf gegebene berühren, 3264 ist u. dgl.[1])

Wir müssen uns hier mit diesem kurzen Hinweise begnügen.

Aufgaben: Bezeichnet man mit (ptn) die Anzahl der durch p endlich ferne Punkte, t Tangenten, n Normalen bestimmten Kegelschnitte, so ist[2]):

$$(401) = (041) = 3, \qquad (212) = (122) = 14,$$
$$(311) = (131) = 6, \qquad (203) = 22, \ (023) = 19,$$
$$(302) = (032) = 9, \qquad (104) = 42, \ (014) = 33,$$
$$(221) = 8, \qquad (113) = 26, \qquad (005) = 51.$$

Kapitel IV.

Geometrographie und Fehlertheorie.

Geometrographie.[3])

Unter dieser Bezeichnung hat Lemoine Betrachtungen in die Geometrie eingeführt, deren Ziel es ist, die verschiedenen Konstruktionen, durch die eine und dieselbe Aufgabe gelöst werden kann, nach ihrer *Einfachheit* und *Genauigkeit* zu klassifizieren.

Einfachheit. Bei alleiniger Anwendung des Lineals hat man offenbar ein Maß der Einfachheit (eigentlich der Kompliziertheit) in der Anzahl Male, die man das Lineal gebraucht, also in der Anzahl der gezogenen Linien. Das Aufsuchen eines Schnittpunktes zweier Linien darf nicht besonders gezählt werden, da ein solcher Punkt nie anders als wieder beim Anlegen des Lineals zur Verwendung kommt. Gleichgültig ist, ob dabei bestimmte Figuren, ein Quadrat, ein Kegelschnitt usw. gezeichnet vorliegen. Wird jedoch zum Lineal noch ein anderes Instrument, z. B. ein Zirkel, hinzugenommen, so wird die Einfachheit einer Konstruktion nicht mehr durch eine, sondern durch *mehrere*, in diesem Fall durch zwei An-

---

1) Diese Anzahl gab J. Steiner irrtümlich zu 6^5 an; die richtige Zahl bestimmten zuerst Chasles und Th. Berent. 2) S. Wiman l. c.

3) Lemoine, La géometrographie, Paris 1902. Congr. de l'ass. frc. pour l'av. d. sc. 1888, 1892, 1893. Geometrographische Gesichtspunkte finden sich auch früher, z. B. bei Steiner (s. z. B. Werke I, p. 510), bei Ch. Wiener, Darstellende Geom. I (1884), p. 85. Auch Mascheronis Forderung, seine Konstruktionen mit möglichst wenig (nicht Kreisen, sondern) Zirkelöffnungen auszuführen, gehört hierher. S. ferner J. Reusch, Planimetrische Konstruktionen in geometrographischer Ausführung, Leipzig 1904. R. Güntsche, Archiv f. Math. u. Phys. (3) III, VI; Hoffm. Ztschr. 1903; Unterrichtsblätter f. Math. u. Nat. 1902. H. Bodenstedt, ib. 1904.

zahlen zu charakterisieren sein. Die Steinerschen Konstruktionen (s. S. 55) sind dadurch charakterisiert, daß der Kreis die geringste Anzahl von Malen, nämlich einmal geschlagen werden soll, und die Mascheronischen (s. S. 56) dadurch, daß das Lineal die geringste Anzahl von Malen, nämlich nullmal gebraucht werden soll. Aber zwischen diesen beiden äußersten Fällen liegen alle diejenigen, bei denen Lineal und Zirkel ohne Beschränkung gebraucht werden dürfen.[1]) Unter allen bei einer Aufgabe möglichen Lösungen ist nur dann eine bestimmte als einfachste zu bezeichnen, wenn man der Anwendung des Zirkels im Verhältnis zu der des Lineals ein bestimmtes *Gewicht* g beilegt. Ist dann z. B. a-mal das Lineal und b-mal der Zirkel gebraucht worden, so ist $a + bg$ ein Maß für die Einfachheit der Konstruktion, und diejenige Konstruktion unter dieser Annahme die einfachste, für welche diese Zahl am kleinsten ist. Ein Urteil über die Annahme von g kann wohl nur empirisch gewonnen werden.[2])

Nimmt man $g = 1$ [3]), so findet man für die Elementaraufgaben des Paralleleziehens, Lotefällens, Loteerrichtens, Streckehalbierens, Winkelhalbierens sehr einfache „geometrographische" Konstruktionen mit dem Einfachheitsmaß 3.

Genauigkeit. Die Genauigkeit hängt von den Fehlerquellen ab und wird bei Gleichartigkeit derselben ihrer Anzahl (umgekehrt) proportional zu setzen sein. Man begeht zwei Fehler, indem man ein Lineal an zwei Punkte anlegt, oder indem man eine Strecke in einen Zirkel nimmt und eine Zirkelspitze in einen Punkt einsetzt. Geschieht das erste a-mal, das zweite b-mal und nennt man g das relative Gewichtsverhältnis der *Fehler*, so ist $a + bg$ ein vorläufiges Maß der Genauigkeit.

Für jede ganz oder halb willkürliche Linie (z. B. Gerade durch *einen* gegebenen Punkt, Kreis mit beliebigem Radius um einen gegebenen Punkt) ist die Zahl a bzw. b um zwei bzw. eine Einheit zu verringern. Nicht gezählt zu werden braucht, daß die *Punkte* wegen der Unvollkommenheit der Linien und des Papiers ungenau werden, da dieser Unsicherheit durch die Zählung der Fehler, die der Bestimmung der Punkte anhaften, schon Rechnung getragen wird. Nicht zu unterscheiden braucht man, ob ein

1) Auch das Abtragen einer Strecke muß als Schlagen eines, wenn auch kleinen Kreisbogens angesehen werden; aber es tritt hier der günstigste Fall einer Punktbestimmung ein, nämlich der, daß die beiden Linien sich senkrecht schneiden.

2) Vgl. hierzu Mehmke, Deutsche Math.-Ver. XII (Leipzig 1903), p. 116; R. Güntsche ib., p. 289.

3) Das tut Lemoine (Assoc. frc. pour l'av. d. sc., Paris 1892, p. 38), und zwar nimmt er bei *allen* Elementaroperationen gleiches Gewicht an. Seine Abzählung ist von der oben vorgeschlagenen etwas verschieden.

Kreis um A mit AB oder mit CD geschlagen wird: *einen* Fehler begeht man im Radius, *einen*, indem man die Zirkelspitze exzentrisch einsetzt. Dadurch ergeben sich Reduktionen der oben angegebenen Anzahl, namentlich dann, wenn man — unter Umständen auf Kosten der Einfachheit — mit möglichst wenig Zirkelöffnungen auszukommen sucht.[1]) Andrerseits ist auch eine Beschränkung auf möglichst wenig Kreis*mittelpunkte* vorteilhaft, da durch Einsetzen einer Zirkelspitze in ein schon vorhandenes Stichloch im allgemeinen kein neuer Fehler entsteht.[2]) Aber die gefundene Zahl wird nur im *Mittel* als Genauigkeitsmaß gelten können. Im einzelnen Falle wird die Genauigkeit noch von der speziellen Lage der gegebenen Elemente abhängen, da z. B. eine Gerade durch zwei nahegelegene Punkte weniger genau bestimmt ist als durch zwei entfernter liegende; und ein Punkt als Schnittpunkt von zwei Linien um so genauer bestimmt ist, je näher der Schnittwinkel einem Rechten gleich ist.[3])

Über die Genauigkeit, mit der eine Zirkelspitze in einen Punkt eingesetzt werden kann, hat Ch. Wiener[4]) Untersuchungen angestellt. Er findet, daß unter mittleren Umständen, die natürlich von Instrument, Papier und Person abhängen, der gemachte Fehler im Mittel 0,012 mm beträgt.[5]) Um die Länge eines Kreisbogens durch Abgreifen mit dem Zirkel annähernd zu finden, trage man eine beliebige kleine Sehne so oft als möglich in ihn ein, und dann ebenso oft auf eine Gerade, dazu noch die Sehne des Restbogens. Je kleiner die genommene Sehne, desto kleiner der Fehler, der aus dem Unterschied zwischen Bogen und Sehne entsteht, aber desto größer der Fehler aus dem wiederholten Einsetzen der Zirkelspitze. Wiener findet als vorteilhaftestes Maß der Sehne bei einem Bogen $\frac{\pi d}{k}$ zum Durchmesser d:

$$0{,}28295 \sqrt[5]{d^3 k}\,.$$

Für die Genauigkeit mit der man das Lineal an einen Punkt anlegen kann, findet Nitz (a. a. O., p. 17) ebenfalls 0,05 mm. Das ist also auch die Genauigkeit, mit der man eine Zirkelspitze in eine Linie einsetzen, überhaupt, mit der man einen Punkt mit einem Punkt oder mit einer Linie zur Koinzidenz bringen kann.

---

1) Wie schon Mascheroni l. c. forderte.

2) P. Böhmer, Über geometrische Approximationen. Diss. Gött. (Berlin 1904), p. 10 u. 16.

3) Die Abhängigkeit der Genauigkeit von der speziellen Lage behandelt: K. Nitz, Anwendungen der Theorie der Fehler in der Ebene auf Konstruktionen mit Zirkel und Lineal. Diss. Königsberg 1905.

4) Schlöm. Ztschr. 16 (1871), p. 112.

5) K. Nitz findet l. c. 0,05 mm.

Fehlertheorie.[1])

Fehlerkurven. Der Schnittpunkt zweier Geraden von konstanter endlicher gleicher Dicke liegt in ihrem Schnittrhombus. Die diesem Rhombus einbeschriebene Ellipse, für welche die Geraden konjugierte Richtungen haben, ist die *Fehlerellipse*[2]). *Gleichwahrscheinlich* werden solche Punkte als Schnittpunkte genommen, die auf einer zur Fehlerellipse koaxialen und ähnlichen Ellipse liegen (Satz von *Bravais*).[3]) Denn für solche Punkte ist die Quadratsumme der Fehler, d. h. der Abstände von den beiden Geraden, konstant.[4]) Handelt es sich um den Schnittpunkt von krummen Linien, so treten an die Stelle der Fehlerellipsen *Fehlerovale*; für die Schnitte von Kreisen mit Geraden oder Kreisen s. Nitz a. a. O.

Die gleichwahrscheinlichen Verbindungsgraden zweier Punkte, die als kleine Kreise angesehen werden, umhüllen eine *Fehlerhyperbel.*[5]) Denn für deren Tangenten ist die Quadratsumme der Fehler, d. h. der Abstände von den beiden Punkten konstant.

Fehlerfortpflanzung. Man kann der *Unsicherheit,* die der Bestimmung von Punkten und Geraden anhaftet, durch die *Dicke* der Punkte und Linien Rechnung tragen. Dann wird im Lauf einer Konstruktion die Dicke zunehmen; es fragt sich in welcher Weise. Bezeichnet man die *lineare* Unsicherheit in der Lage eines Grundpunktes mit 1, so ist die lineare Unsicherheit eines konstruierten Punktes nach Lemoine der Anzahl der benutzten Punkte gleich. Das ist richtig, wenn z. B. ein Punkt durch wiederholtes Abtragen von Strecken erhalten wird: in jeden späteren Punkt geht die Unsicherheit des vorhergehenden zum vollen Betrage ein. Es ist — allgemeiner — auch dann richtig, wenn jeder Punkt durch die vorhergehenden in der besten Weise, nämlich durch *senkrechte* Schnitte bestimmt wird. Diese Unsicherheit kann bei ungünstigen Lagever-

---

1) Vereinzelte Bemerkungen über Fehler in der Punktbestimmung machten schon Cotes (1709), Lambert (1765), Adrain (1808), Herschel (1850); s. Nitz l. c., p. 6. Die weitere Ausbildung wurde durch die Geodäsie veranlaßt. Die Forderung einer Fehlertheorie für die zeichnende Geometrie ist wohl zuerst von Chr. Wiener (Lehrb. d. darst. Geom. 1884 I, p. 190), später besonders von F. Klein (Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie (Leipzig 1902), p. 358 ff.) erhoben worden.

2) Bienaymé, Liouv. J. (1) 18 (1852); Czuber, Wiener Akad. Ber. 1880, 80 Abt. IIa, Prager technische Blätter 1878. Schols, Akad. Amsterd. 15 (1875). Delft Ann. 3 (1887); Ann. de l'éc. polyt. de Delft 2 (1886). Bertrand, Comptes Rendus 106 (1888). Jung ib.

3) Mém. prés. par divers savants, Paris 1846, IX. Reina, Atti Acc. Lincei. Rendiconti (fis. mat. nat.) (5) 6, 1, 1897.

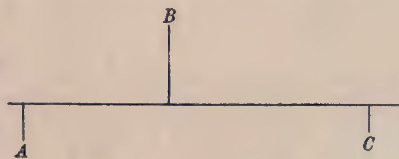
4) S. z. B. Salmon-Fiedler, Kegelschnitte (6) I, p. 341.

5) Nitz l. c., p. 17.

hältnissen beliebig wachsen. Andrerseits gibt die Lemoinesche Genauigkeit bei *günstigen* Lageverhältnissen nur das *Maximum* des Fehlers an, z. B. ist der Fehler im Radius, der durch Einsetzen von *zwei* Zirkelspitzen begangen wird, nur im Maximum gleich dem doppelten Exzentrizitätsfehler; der *mittlere* Fehler wächst nicht proportional der *Anzahl* der benutzten Punkte, sondern nur proportional der Quadratwurzel dieser Anzahl.[1])

Fehlerausgleichung. Ist ein Punkt durch mehr als zwei Linien zu bestimmen, die nicht genau durch einen Punkt gehen, oder eine Gerade durch mehr als zwei Punkte, die nicht genau auf einer Geraden liegen u. dgl., so ist die *wahrscheinlichste* Lage des Punktes bzw. der Geraden zu ermitteln, d. i. nach der *Gauß*schen Forderung diejenige, bei der die Quadratsumme der Fehler ein Minimum wird. Der Punkt im Dreiseit, der dieser Bedingung genügt, ist der *Grebe*sche (*Lemoine*sche) Punkt: Schnittpunkt, der an den Winkelhalbierenden gespiegelten Seitenhalbierenden; für ihn ist die geometrische Abstandssumme Null [2]); er ist Schwerpunkt der Höhenfußpunkte. Darauf beruht die Konstruktion des Punktes, und zwar gleich bei einer Bestimmung aus n Geraden nach dem *Bertot*schen Verfahren: Man nehme einen Punkt O und einen durch ihn gehenden Kreis $\mathfrak{K}$ beliebig an, fälle von O die Lote auf die gegebenen Geraden, deren Fußpunkte heißen R, deren Schnitte mit $\mathfrak{K}$ heißen Q'; S' sei der Schwerpunkt der Q', S der Schwerpunkt der R, $[OS]$ schneide $\mathfrak{K}$ in T', $[T'S']$ schneide $\mathfrak{K}$ in O', $O'P'$ sei der durch O' gehende Durchmesser von $\mathfrak{K}$, und $\Delta\, OSP \sim \Delta\, O'S'P'$; dann ist P der gesuchte Punkt.

Eine Gerade, die von drei gegebenen Punkten A, B, C die kleinste Abstandsquadratsumme hat, liegt so, daß drei den Abständen proportionale an ihr angreifende Kräfte im Gleichgewicht sind. In der Tat, ist $l(x, y) = 0$ die Gleichung der gesuchten Geraden in der Normalform, also



$$l(A)^2 + l(B)^2 + l(C)^2 = \text{Minimum}$$

die Bedingung, so folgt durch Differentiation:

$$x_A l(A) + x_B l(B) + x_C l(C) = 0,$$

$$y_A l(A) + y_B l(B) + y_C l(C) = 0;$$

1) Über Fehlerzusammensetzung s. d'Ocagne, Compt. rend. 118 (1894), Ann. de la soc. scient. Bruxelles 18 A (1894), Bull. de la Soc. Math. de France 23 (1895). Czuber, Theorie der Beobachtungsfehler, Teil III, Leipzig 1891. Nitz l. c., p. 30.

2) S. z. B. Geuer, Die Genauigkeit geometrischer Zeichnungen, Progr. Karlsruhe 1902.

das sind aber die Gleichgewichtsbedingungen für die drei Kräfte $l(A)$, $l(B)$, $l(C)$. Dasselbe gilt natürlich allgemein bei n Punkten.

Für die konstruktive Ausgleichung einer Geraden aus mehr als zwei oder eines Kreises aus mehr als drei, eines Kegelschnitts aus mehr als fünf Punkten scheinen dem Bertotschen entsprechende einfache Verfahren noch nicht gefunden zu sein. Sie würden, wenn auch theoretisch von Interesse, doch praktisch schon zu kompliziert sein, um wirklich angewendet werden zu können.

Zu sehr einfachen Ausgleichungen kommt man jedoch (wenigstens bei *einfacher* Überbestimmung), wenn man nicht nach der *Gauß*schen, sondern nach der *Poncelet-Tchebycheff*schen Forderung ausgleicht: der größte Fehler soll ein Minimum sein. Z. B. ist dann der ausgeglichene Punkt zu drei Geraden der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises; denn will man irgendeinen von dessen drei Abständen durch Verschieben des Punktes verkleinern, so vergrößert man damit immer wenigstens einen der anderen; und die Mittelpunkte der *an*beschriebenen Kreise haben größere Abstände. Ebenso leicht findet man die ausgeglichene Gerade zu drei Punkten ABC als Mittellot der kleinsten Höhe des Dreiecks ABC. Denn bewegt man diese Gerade so, daß einer der Abstände abnimmt, so wächst ein anderer, und die beiden andern Mittellote haben nicht diese Eigenschaft.

Für den ausgeglichenen Kreis zu vier nahe konzyklischen Punkten A, B, C, D bemerken wir, daß er *gleiche* Abstände von allen vier Punkten haben muß. Hätten z. B. die Punkte A und B verschiedene Abstände, so kann man unter Beibehaltung der Abstände von C und D den Kreis offenbar stets so variieren, daß wenigstens der größere der Abstände von A und B kleiner wird. Außerdem müssen zwei aufeinanderfolgende Punkte auf entgegengesetzten Seiten des Kreises liegen, da man sonst in derselben Weise *beider* Abstände verringern könnte. Daraus geht hervor, daß es nur *einen* Kreis der verlangten Art geben kann: sein Mittelpunkt ist Schnitt der Mittellote der Diagonalen AC, BD des Vierecks $ABCD$, sein Radius das arithmetische Mittel der Abstände des Mittelpunkts von den vier Ecken.[1]) Ebenso leicht ist seine Gleichung hinzuschreiben. Sind

$$f_1(x, y) = 0,\ f_2(x, y) = 0,\ f_3(x, y) = 0,\ f_4(x, y) = 0$$

die Gleichungen der vier Kreise BCD, ACD, ABD, ABC in der Normalform $x^2 + y^2 - 2a_i x - 2b_i y + c_i = 0$, $\quad (i=1,2,3,4)$

so ist
$$f(x,y) = \frac{f_1(x,y)}{f_1(x_A, y_A)} - \frac{f_2(x,y)}{f_2(x_B, y_B)} + \frac{f_3(x,y)}{f_3(x_C, y_C)} - \frac{f_4(x,y)}{f_4(x_D, y_D)} = 0$$

die Gleichung des fraglichen Kreises, denn dieser Kreis hat gleiche Potenzen, also auch gleiche Abstände von den vier Punkten, und die

1) Böhmer l. c., p. 37.

Potenzen in bezug auf A, B, C, D sind abwechselnd positiv und negativ, d. h. die vier Punkte liegen abwechselnd außen und innen. Daß aber dieser Kreis wirklich die verlangte Minimaleigenschaft hat, geht wie bei Punkt und Gerade daraus hervor, daß jede Variierung des Kreises, welche *einen* Abstand verkleinert, mindestens *einen* vergrößert; oder analytisch sehr einfach daraus, daß jeder ihm benachbarte Kreis:

$$\lambda_1 \frac{f_1(x, y)}{f_1(x_A, y_A)} - \lambda_2 \frac{f_2(x, y)}{f_2(x_B, y_B)} + \lambda_3 \frac{f_3(x, y)}{f_3(x_C, y_C)} - \lambda_4 \frac{f_4(x, y)}{f_4(x_D, y_D)} = 0,$$

die Potenzen:

$$p_i = \frac{\pm \lambda_i}{\frac{\lambda_1}{f_1(x_A, y_A)} - \frac{\lambda_2}{f_2(x_B, y_B)} + \frac{\lambda_3}{f_3(x_C, y_C)} - \frac{\lambda_4}{f_4(x_D, y_D)}} \quad (i=1,2,3,4)$$

hat, zwischen denen eine lineare Relation besteht; dann findet aber das Minimum der größten statt, wenn alle gleich sind. (Vgl. z. B. die Koordinaten der Punkte einer Geraden oder Ebene, wo das Entsprechende unmittelbar anschaulich wird.)

Für den ausgeglichenen Kegelschnitt zu sechs nahe auf einem Kegelschnitt gelegenen Punkten $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ beweist man zunächst genau wie beim Kreise, daß die Punkte abwechselnd links und rechts desselben liegen und gleiche Abstände von ihm haben müssen. Überhaupt ist diese Schlußweise stets anwendbar bei Kurven vom Geschlechte Null (Unikursalkurven); nur bei solchen, die ja in einem Zuge beschrieben werden können, hat ja auch der Ausdruck „abwechselnd rechts und links gelegen" überhaupt einen Sinn. Wie wir beim Kreise statt des Abstandes die Potenz eines Punktes in bezug auf ihn einführten, so wollen wir hier den halben Abstand eines Punktes von seiner Polaren einführen, der bei kleinen Abständen dem Abstand vom Kegelschnitt nahe gleich ist. Ist $f(x, y) = 0$ die Gleichung des Kegelschnitts in Cartesischen Koordinaten, so ist der Abstand eines Punktes von seiner Polaren mit Rücksicht auf S. 18, 3 gleich

$$\frac{f(x, y)}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}},$$

wenn f_1 und f_2 die Ableitungen von f nach x und y sind. Der Divisor $\sqrt{f_1^2 + f_2^2}$ hat eine einfache Bedeutung. Bekanntlich hat der Krümmungsradius den Wert:

$$\varrho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

oder, wenn man y' und y'' aus

$$f_1 + f_2 y' = 0, \quad f_{11} + 2 f_{12} y' + f_{22} y'^2 + f_2 y'' = 0$$

entnimmt:

$$\varrho = \frac{(f_1^2 + f_2^2)^{\frac{3}{2}}}{f_{11} f_2^2 - 2 f_{12} f_1 f_2 + f_{22} f_1^2}.$$

Den Nenner kann man auch mit Rücksicht auf die Eulerschen [1]) Formeln

$$\begin{aligned} f_1\, x + f_2\, y + f_3 &= 2f \\ f_{i1} x + f_{i2} y + f_{i3} &= \ f_i \end{aligned} \qquad (i=1, 2, 3)$$

abgesehen vom Vorzeichen schreiben:

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix},$$

wenn f_3 die Ableitung von f nach der homogen-machenden Variabelen ist, die nachher wieder gleich Eins gesetzt wird, und f_{11} usw. die zweiten Ableitungen sind. Das ist also die *Diskriminante* des Kegelschnitts. Jetzt können wir die Gleichung des gesuchten Kegelschnitts sofort hinschreiben. Seien nämlich

$$f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}, f^{(4)}, f^{(5)}, f^{(6)} = 0$$

die Gleichungen der Kegelschnitte, welche durch je fünf der sechs Punkte gehen, die also nur wenig voneinander unterschieden sind. So sind auch die Krümmungen an nahe gelegenen Stellen dieser Kegelschnitte nur wenig unterschieden, ebenso ihre Diskriminanten. Sind $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \varrho_5, \varrho_6$ die Krümmungsradien an den sechs Punkten, so ist [2]):

$$f = \varrho_1^{\frac{1}{3}} \frac{f^{(1)}_{(x,y)}}{f^{(1)}_{(x_1, y_1)}} - \varrho_2^{\frac{1}{3}} \frac{f^{(2)}_{(x,y)}}{f^{(2)}_{(x_2, y_2)}} + \varrho_3^{\frac{1}{3}} \frac{f^{(3)}_{(x,y)}}{f^{(3)}_{(x_3, y_3)}} - \varrho_4^{\frac{1}{3}} \frac{f^{(4)}_{(x,y)}}{f^{(4)}_{(x_4, y_4)}} + \varrho_5^{\frac{1}{3}} \frac{f^{(5)}_{(x,y)}}{f^{(5)}_{(x_5, y_5)}} - \varrho_6^{\frac{1}{3}} \frac{f^{(6)}_{(x,y)}}{f^{(6)}_{(x_6, y_6)}} = 0$$

die Gleichung des gesuchten Kegelschnitts, denn erstens ist $f(x, y)$ abwechselnd positiv und negativ in den Punkten P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, zweitens sind die Abstände der Punkte P_i von ihren Polaren proportional

$$f(x_i, y_i) : \varrho_i^{\frac{1}{3}} \qquad (i=1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

also einander gleich. Dabei ist vorauszusetzen, daß die Diskriminante nicht sehr klein ist, d. h., daß die sechs Punkte nicht nahe auf zwei Geraden liegen.

Daß aber der gefundene Kegelschnitt wirklich die verlangte Minimaleigenschaft hat, geht wieder daraus hervor, daß jede Variierung desselben, welche *einen* Abstand verringert, mindestens *einen* vergrößert; und das ist *genau* wie beim Kreise zu zeigen.

---

1) Mechanica 1736 II, §§ 106, 497. Calc. diff. § 225.

2) Das fand auf weniger einfachem Wege Böhmer l. c., p. 35.

Kapitel V.

Konstruktionen unter besonderen Bedingungen.

Hilfskonstruktionen bei ungünstigen Lageverhältnissen.

Bei den linearen Konstruktionen können die folgenden zwei ungünstigen Lagen eintreten:

1. Zwei Punkte AB liegen nahe aneinander; ihre Verbindungsgerade genauer zu bestimmen.

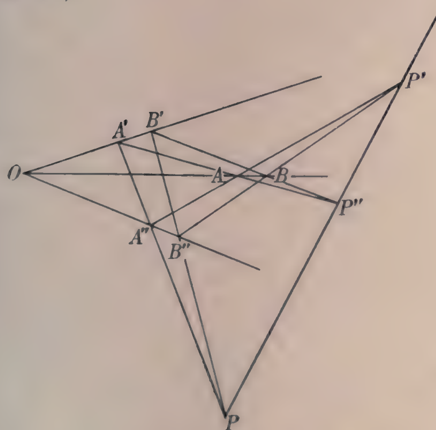
Man nehme die Strecke $A'B'$ und konstruiere:

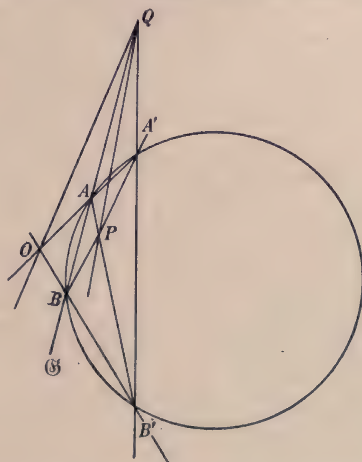
$$P'' = ([AA'][BB']);$$

auf einer durch P'' gehenden beliebigen Geraden nehme man P und P' beliebig an, und konstruiere:

$$A'' = ([PA'][P'A]), \quad B'' = ([PB'][P'B]), \quad O = ([A'B'][A''B'']),$$

dann ist $[OA]$ die gesuchte Gerade (nach dem Desarguesschen Satze, S. 23).





2. Zwei Gerade $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ schneiden sich unter sehr spitzem Winkel; ihren Schnittpunkt genauer zu bestimmen. Auf $\mathfrak{A}$ nehme man $A'A''$, auf $\mathfrak{B}$ nehme man $B'B''$ beliebig an, konstruiere $O = ([A'B'][A''B''])$, auf einer Geraden durch O nehme man A, B beliebig an und konstruiere $P' = ([AA''][BB''])$, $P'' = ([AA'][BB'])$, dann ist

$$P = ([A'A''][P'P''])$$

der gesuchte Punkt.

Die Aufgabe: Durch einen Punkt eines Kegelschnitts geht eine Gerade, die ihn unter sehr spitzem Winkel schneidet, den andern Schnittpunkt genauer zu bestimmen, führt man mit Hilfe des Pascalschen Satzes (S. 16) auf den Schnitt von Geraden zurück.

Bei den quadratischen Aufgaben kann es eintreten, daß eine Gerade 𝔊 den gezeichnet gegebenen Kegelschnitt unter sehr spitzem Winkel schneidet; die Schnittpunkte sollen genauer konstruiert werden. Man nehme auf 𝔊 den Punkt Q beliebig an, dann O auf der Polare von Q und den Pol P von $[OQ]$. Zu $[QO]$, $[QP]$ und der gegebenen Geraden konstruiere man die vierte harmonische; sie treffe den Kegelschnitt in A', B'. Dann sind $(\mathfrak{G}[B'P])$, $(\mathfrak{G}[A'P])$ die zwei gesuchten Schnittpunkte.

Man suche ferner Hilfskonstruktionen auf zum Ersatz sehr kleiner oder sehr großer Kreise.

Ähnliche Hilfskonstruktionen sind für die kubischen Aufgaben anzuwenden, wenn der konstruierte Kegelschnitt (bzw. Kreis) den gezeichnet gegebenen in zwei, drei oder vier nahe zusammenliegenden Punkten, oder in zwei Paaren von nahe zusammenliegenden Punkten schneidet; dabei ist auch der Fall zu berücksichtigen, daß zwei nahe zusammenliegende Punkte imaginär sind.

Konstruktionen im begrenzten Gebiete[1]) und mit beschränkten Hilfsmitteln.

Bisher haben wir immer angenommen, daß die ganze unendlich weite Ebene für die Konstruktion benutzt werden kann, daß das Lineal beliebig lang, der Zirkel beliebig groß ist usw. Praktisch ist dies nun nicht der Fall. Man muß vielmehr auf die Begrenztheit der Konstruktionsebene Rücksicht nehmen, darf aber eine Konstruktion nicht deshalb als unausführbar ansehen, weil im Laufe derselben Punkte auftreten, welche außerhalb der Zeichenebene zu liegen kommen. Wir nennen solche Punkte unzugängliche Punkte. Unzugängliche Gerade sind solche, die keinen zugänglichen Punkt enthalten. Unzugängliche Punkte höherer Ordnung sind solche, die durch unzugängliche Gerade definiert werden.

Alsdann sind die folgenden Aufgaben zu lösen:

I. Von einem *gegebenen* zugänglichen Punkt P eine Gerade nach einem unzugänglichen Punkt zu ziehen, der als Schnittpunkt von zwei zugänglichen Geraden 𝔊, $\mathfrak{G}_1$ gegeben ist.

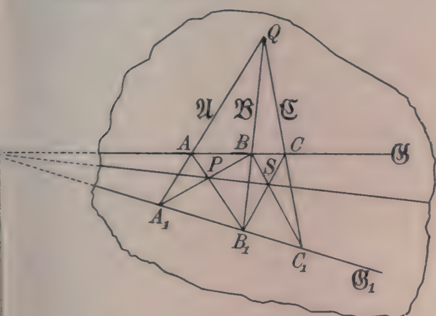
Man ziehe durch P zwei beliebige Transversalen AB_1 und A_1B nach den beiden gegebenen Geraden und durch den Punkt

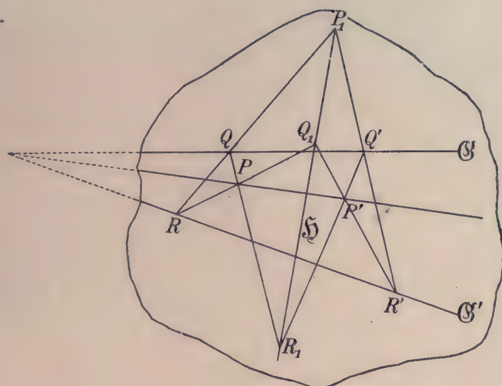
1) Schon J. H. Lambert, Freye Perspective (2. Aufl., Zürich 1774) II, p. 172 löst Aufgaben wie die Verbindung unzugänglicher Punkte, wie später auch Steiner l. c. und G. Lamé (Examen des differentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géom. Paris 1818). S. ferner: A. Witting, Geometr. Konstr. insbesondere in begrenzter Ebene. Programm Dresden 1899. P. Zühlke, Ausführung elementar-geometrischer Konstruktionen bei ungünstigen Lageverhältnissen. Progr. Charlottenburg 1900.

$$Q = ([AA_1][BB_1])$$

einen beliebigen Strahl: QCC_1; der Schnittpunkt S von $[BC_1]$ und $[CB_1]$ liefert, mit P verbunden, die gesuchte Gerade (auf Grund der harmonischen Eigenschaften des Vierecks S. 6).

Die Konstruktion versagt, wenn der Hilfspunkt Q ebenfalls außerhalb des Konstruktionsbereiches fällt. Dann kann man die folgende anwenden, die auf dem Desarguesschen Satze beruht und stets anwendbar ist.





Man nehme auf 𝔊 einen beliebigen Punkt Q, auf 𝔊' einen beliebigen Punkt R an und ziehe die Gerade ℌ so, daß sie die drei Seiten des Dreiecks PQR in zugänglichen Punkten $P_1 Q_1 R_1$ schneidet. Dann ziehe man durch P_1 eine beliebige Gerade, die 𝔊 und 𝔊' in Q' und R' schneide. Dann ist $[P([Q'R_1], [Q_1 R'])]$ die gesuchte Gerade.[1]) Die Hilfskonstruktion ist also dieselbe, wie die bei einem spitzen Schnitt von 𝔊 und 𝔊' anzuwendende; sie ist überhaupt immer anzuwenden, wenn der Schnittpunkt (𝔊𝔊') aus irgendeinem Grunde nicht benutzt werden kann oder soll.

II. Von einem *beliebigen* zugänglichen Punkt P nach einem unzugänglichen Punkt zweiter Ordnung

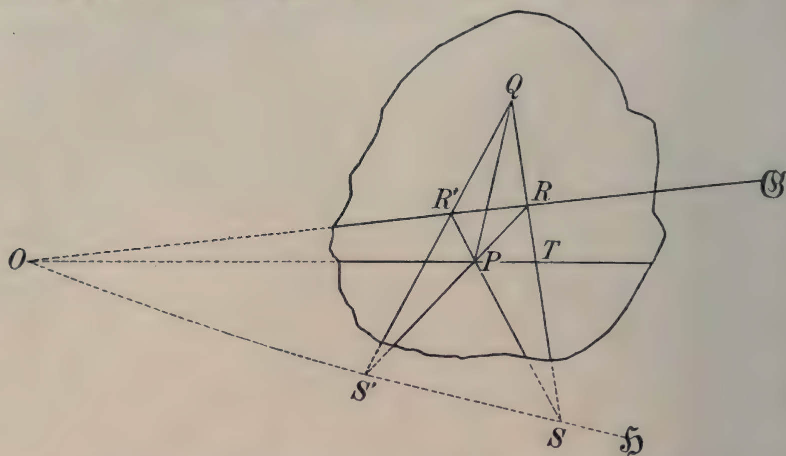
$$O = (𝔊, ℌ) = ([RR'][SS'])$$

eine Gerade zu ziehen (Fig. S. 132).

Man kann (nach I) annehmen, daß von den beiden Punkten S, S' der unzugänglichen Geraden ℌ, welches beide unzugängliche Punkte erster Ordnung sind, Gerade durch R und R' gezogen sind; dann soll der Schnittpunkt $P = ([R'S], [RS'])$ mit dem unzugänglichen Punkte zweiter Ordnung O verbunden werden. Zu dem Zwecke konstruiere

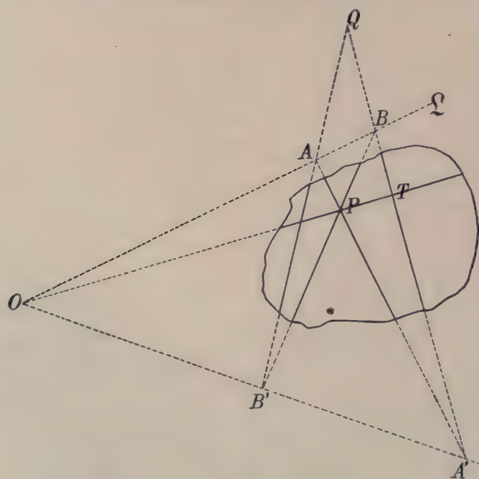
1) Natürlich kann man ebenso den Pappusschen Satz (s. S. 16[1])) benutzen, (s. z. B. M. d'Ocagne, Journ. de Math. élém. 1886, p. 59) wie überhaupt alle Sätze, in denen drei Linien durch einen Punkt gehen. Legt man nicht Wert darauf, diese projektive Aufgabe projektiv zu lösen, so kann man auch Sätze, wie den Höhensatz vom Dreieck u. dgl. benutzen.

man zu $[PQ]$, $[PR]$, $[PS]$ den vierten harmonischen Strahl PT, dann geht dieser durch O hindurch, wie man aus dem vollständigen Viereck $OR'PS'$ erkennt. Damit ist O unzugänglich erster Ordnung. — Natürlich ist hier auch *die* Konstruktion anwendbar, die zur Verbindung zweier nahegelegener Punkte angewendet wurde.



III. Von einem beliebigen zugänglichen Punkte P nach einem unzugänglichen Punkte $O = (\mathfrak{L}\mathfrak{L}')$ dritter Ordnung eine Gerade zu ziehen.

Man ziehe durch P zwei beliebige Gerade $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$, deren Schnittpunkte A, B, A', B' mit $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ werden nach II. unzugängliche Punkte erster Ordnung. Von $[AB']$ konstruiere man nach II. den Schnittpunkt mit einer beliebigen zugänglichen Geraden; zwei solcher Schnittpunkte liefern die Gerade $[AB']$, ebenso erhält man $[BA']$. Dann kann man nach dem Schnittpunkte Q, der nur von der ersten Ordnung unzugänglich ist, nach I. eine Gerade durch P ziehen. Endlich konstruiere man zu PQ, PB', PA den vierten harmonischen Strahl PT. Dieser geht dann wie in II. durch O. — Durch diese Konstruktionen wird jeder unzugängliche Punkt nur unzugänglich erster Ordnung.



IV. Zwei unzugängliche Punkte S, S' zu verbinden; man

konstruiere den Schnitt O von $[SS']$ mit einer zugänglichen Geraden $[RR']$ wie in II. und verbinde O mit S wie in I.

Damit sind die projektiven linearen Aufgaben in begrenzter Ebene als ausführbar erwiesen. Die affinen und metrischen kann man, wie S. 21 u. 30 gezeigt, durch Annahme von bestimmten Grundfiguren auf die projektiven zurückführen. Man kann diese Konstruktionen: Paralleleziehen, Lot errichten, Lot fällen, Strecke halbieren aber auch in der üblichen Weise ausführen und durch Hilfskonstruktionen auf die begrenzte Ebene beschränken (s. Witting, Zühlke a. a. O.). Dasselbe gilt für die Hilbertschen Konstruktionen mit Streckenübertrager. Insbesondere halbiere man einen unzugänglichen Winkel, eine unzugängliche Strecke, trage Strecken von unzugänglichen Punkten aus oder nach unzugänglichen Punkten hin, oder auf unzugänglichen Geraden ab, usw.[1]) Ebenso sind die quadratischen Konstruktionen auf die begrenzte Ebene zurückzuführen. Dabei kommt es offenbar nur auf die Lösung der folgenden beiden Aufgaben an:

1. Nach den Schnittpunkten des Kreises $A(AB)$ mit der Geraden $[CD]$,

2. nach den Schnittpunkten des Kreises $A(AB)$ mit dem Kreise $C(CD)$

Gerade zu ziehen, wenn unter den Punkten A, B, C, D unzugängliche sind.

Oft anwendbare Hilfsmittel sind Ähnlichkeiten, Affinitäten und Inversionen.[2])

Da alle projektiv linearen Aufgaben in begrenzter Ebene ausführbar sind, sind sie es auch mit begrenztem Lineal. Denn beschränkt man das Zeichenfeld auf ein Stück, das in keiner Richtung die Lineallänge überschreitet, so sind in *diesem* die Aufgaben mit dem gegebenen Lineal lösbar. Liegen aber bereits Daten vor, die für die gegebene Lineallänge unzugänglich sind, z. B. zwei zu weit voneinander entfernte Punkte, die durch eine Gerade zu verbinden sind, so muß man durch einen derselben oder beide je zwei gerade Linien bis in das vorher abgegrenzte Zeichenfeld ziehen, usw.

Die den affinen und metrischen Konstruktionen zugrunde liegenden Daten können natürlich auch außerhalb des Zeichenfeldes liegen; man kann dann zunächst mit ihrer Hilfe entsprechende Daten *im* Zeichenfelde konstruieren. Dagegen muß für die quadratischen Konstruktionen von dem Kegelschnitt bzw. Kreis mindestens ein Stück

---

1) Vgl. z. B. Francisci a Schooten exercitationum mathematicarum libri V (Leyden 1657) lib. II.

2) Über diese und ähnliche Methoden vgl. J. Petersen, Methoden und Theorien zur Auflösung geometr. Konstruktionsaufgaben, Kopenhagen. Deutsch von Fischer-Benzon, Kopenhagen 1879.

im Zeichenfelde liegen; daß das genügt, haben wir bereits oben bewiesen (S. 49).

Bei den metrischen kubischen Konstruktionen unter Zugrundelegung eines Kegelschnittbogens kann es eintreten, daß der Kreis, von dessen Schnittpunkten mit dem gegebenen Bogen die Lösung der Aufgabe abhängt, seinen Mittelpunkt außerhalb des Zeichenfeldes hat. *Theoretisch* wird es von Interesse sein, die angegebene Schwierigkeit durch eine Transformation zu beseitigen. *Praktisch* wird man ein Instrument anwenden, mit dem man Kreisbogen mit unzugänglichem Mittelpunkt schlagen kann. Das einfachste ist ein verstellbarer Winkel, dessen Schenkel man durch zwei Punkte gleiten läßt; die Spitze beschreibt den Kreis. Für den Fall eines Rechten findet sich diese Anwendung schon bei Vitruv [1]), der mit einem Winkelhaken prüft, ob die Vertiefungen in gestreiften Säulen halbkreisartig ausgearbeitet sind. Ein solches Instrument mit einem *stellbaren* Winkel ist namentlich in der Kartographie mehrfach gebraucht worden.[2]) Dieser Gebrauch eines Winkels ist lediglich als Ersatz des Zirkels anzusehen, auch wenn Kreise nicht wirklich damit geschlagen werden, sondern der Winkel nur mit seinen Schenkeln durch zwei Punkte, mit seiner Spitze auf eine Linie gelegt wird. Dabei werden also *drei* Koinzidenzen gefordert, während bei Zirkel und Lineal deren nur *zwei* nötig sind. Ein derartiger Gebrauch steht also genau auf gleicher Stufe z. B. mit den „Einschiebungen" (s. S. 78); die Alten vollzogen diese mit einem geteilten Maßstab oder einem Lineal mit zwei Marken.[3]) Diese Marken mußten also auf zwei gegebene Linien, die Linealkante auf einen gegebenen Punkt gelegt werden. Ein solches Instrument ist als der einfachste Konchoidenzirkel anzusehen, gleichgültig ob man die Konchoide wirklich zeichnet oder nicht. Ebenso finden bei Newtons Zissoidenzirkel drei Koinzidenzen statt (s. S. 100 [3])).

Von Interesse ist noch, daß das Instrument *nicht* verstellbar zu sein braucht; ein gewöhnliches rechtes oder schiefes Winkelscheit genügt vielmehr. Auch braucht man die Schenkel bloß durch zwei bestimmte feste Punkte AB gehen zu lassen. Die Richtigkeit dieses Satzes geht sofort aus dem Steiner-Ponceletschen Satze (S. 55) hervor, wenn man noch hinzunimmt, daß man mit Rücksicht auf S. 38

1) Architectura Lib. III am Ende.

2) Aus Perraults Übersetzung des Vitruv führt Leupold (Theatrum arithmetico-geometricum, Kap. 19, Tab. XXb Fig. 9, 10) ein solches an; s. ferner Lowiz: De figura et divisione segmentorum quibus magni globi coelestes et terrestes obducantur (Comm. soc. reg. scientiar. Gotting. Antiquiores Tom. I, 1778): Pieter Smit, Cosmographia, of Verdeelinge van de geheele Wereld, als mede het maken van de Hemelsche en Aardsche Globe (Amst. 1720, Fig. 51, 52); Kästner, Geom. Abh. I (Gött. 1790), p. 303. — Vgl. auch Stanleys Centrograph (s. Jordan, Ztschr. f. Vermessungswesen 5 (1876), p. 459).

3) Adler (Konstr., p. 245) nimmt einen Papierstreifen.

den Mittelpunkt des durch AB mit dem Winkelscheit gelegten Kreises konstruieren kann. Natürlich sind im einzelnen die Konstruktionen mit Winkelscheit viel einfacher auszuführen als auf diesem eben angedeuteten Wege, der nur ihre *Möglichkeit* dartun soll.

Ein anderes Instrument zum Schlagen großer Kreise gibt Tchebycheff[1]) an: Mehrere kongruente Glieder sind durch Gelenke derart verbunden, daß sie stets sehr nahe einen regulären Polygonzug bilden; daran wird ein biegsames Lineal angelegt.

Als ein Grenzfall des Winkelscheits ist das Lineal mit zwei parallelen Kanten anzusehen, das sich aber insofern neben Lineal und Zirkel stellt, als seine Anwendung ebenfalls nur *zwei* Koinzidenzen erfordert. Um zu erkennen, daß aus der Begrenztheit eines solchen Bi-Lineals[2]) keine wirklichen Konstruktionsbeschränkungen entstehen, können wir zunächst wieder, wie oben, annehmen, daß das Konstruktionsfeld in keiner Richtung die Länge des Lineals übertrifft. Dann muß von dem gedachten Kreise mit Linealbreite als Radius wenigstens ein Bogen mit Kreismittelpunkt auf dem Zeichenfeld Platz haben, d. h. die Breite des Lineals kleiner als die Länge sein; das nehmen wir an. Das Anlegen des Lineals mit einer Kante an einen Punkt A, mit der anderen an einen Punkt B kann dann entweder durch zu große Nähe der Punkte oder dadurch vereitelt werden, daß einer oder beide unzugänglich sind.

Im ersten Fall handelt es sich um die imaginären Berührpunkte der Tangenten von B an den mit der Linealbreite um A zu schlagenden Kreis. Man findet sie auf der Polaren von B in bezug auf diesen Kreis durch zwei Paar konjugierter Punkte; das erfordert lediglich Linealkonstruktionen.

Im zweiten Fall kann man zunächst ausschließen, daß *beide* Punkte A, B unzugänglich sind; denn man kann annehmen, daß das Tangentenziehen nur an den gedachten und zugänglich gewählten Steinerkreis zu erfolgen hat. Sei also A dessen Mittelpunkt, B unzugänglich. Man ziehe die Zentrale $[AB]$, die aus dem Kreis den Durchmesser UU' ausschneide; konstruiere C, D harmonisch zu U, U'; ferner B' so, daß B, B' harmonisch zu C, D ist; lege von B' die Tangenten $B'P'$, $B'Q'$ mit den Berührpunkten P', Q' an den Kreis; dann sind

$$P = ([CP'][DQ']), \quad Q = ([CQ'][DP'])$$

die Berührpunkte der von B an den Kreis zu legenden Tangenten. Der Beweis folgt nach S. 6 u. 10.

Für den Fall der Mascheroni-Konstruktionen sind auch Hilfskonstruktionen für *die* Fälle zu erfinden, daß ein zu schlagender Kreis

1) Assoc. franc. pour l'avancement des sciences 1876 (Paris 1877), p. 81. S. hierüber und über Peaucelliers Inversor oder Zirkelparallelogramm z. B. Helmert, Ztschr. f. Vermessungswesen 6 (1877), p. 148.

2) Der Ausdruck Parallellineal ist bereits für ein anderes Instrument verbraucht.

kleiner oder größer ist, als der gegebene Zirkel überhaupt oder mit Rücksicht auf die Genauigkeit gestattet.

Mechanische Konstruktionsmittel.[1])

Die Unzulänglichkeit von Lineal und Zirkel bei vielen Konstruktionsaufgaben führte schon in den ältesten Zeiten dazu, neben diesen uralten Instrumenten, zu denen auch noch der Winkelhaken [2]) zu rechnen ist, andere einzuführen. Seitdem sind unzählige Instrumente hinzu erdacht worden, aber die Zahl der neuen und originellen Ideen ist verhältnismäßig bescheiden. Wenn man Ordnung in das Chaos bringen will, muß man zunächst unterscheiden zwischen denjenigen Apparaten, die — offen oder versteckt — eine Kurve zeichnen, und den übrigen.

Was die ersteren Instrumente, „Kurvographen", betrifft, so wird jedes solche offenbar um so genauer sein, je einfacher es ist. Unter diesem geometrographischem Gesichtspunkt verdienen also vor allem *die* Instrumente Beachtung, die aus *einem einzigen beweglichen* Teile bestehen, die also gewissermaßen die einfachsten ihrer Art sind. Außer dem beweglichen Teil können diese Instrumente einen *festen* Teil besitzen, der die „Führung" des beweglichen vermittelt; aber es macht keinen prinzipiellen, nur einen Genauigkeitsunterschied, wenn diese Führung bloß an gezeichnet vorliegenden Linien erfolgt. Wir wollen daher den beweglichen Teil, den allein charakteristischen, als das *Instrument* bezeichnen. Die allgemeinste Art der Führung besteht nun offenbar darin, daß zwei mit dem Instrument starr verbundene Linien (z. B. Ränder) an zwei in der Ebene gezeichnet vorliegenden Kurven gleiten. In der Tat ordnen sich dieser Art Führung alle angewendeten unter, wenn man berücksichtigt, daß die Kurven auch z. T. in Punkte degenerieren können. So benutzt C. Bartl [3]) einen Winkel, dessen Schenkel er an zwei Kreisen gleiten läßt, worin die früher erwähnte Anwendung als Spezialfall enthalten ist, wenn die Kreise sich auf Punkte reduzieren.[4]) Beim Konchoidenzirkel, gleichgültig

---

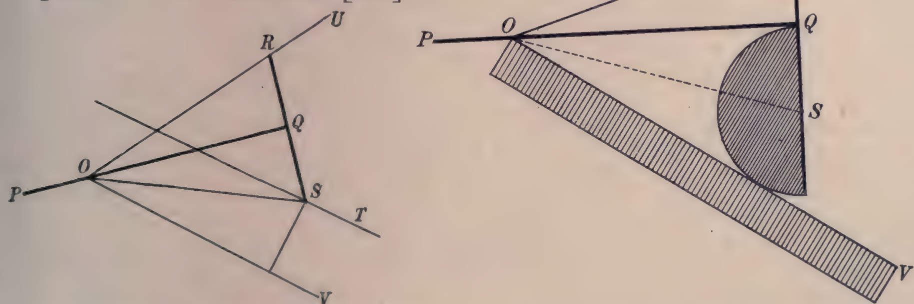
1) Vgl. hierzu: J. H. M. Poppe, Geschichte der Anwendung der Kreis- und anderen krummen Linien in den mechanischen Künsten und in der Baukunst bis auf Descartes. Göttingen 1800. A. v. Braunmühl, Historische Studie über die organische Erzeugung ebener Kurven von den ältesten Zeiten bis zum Ende des 18. Jahrhunderts, in W. v. Dycks Katalog math. usw. Modelle (München 1892), p. 54. Juel, Über graphische Erzeugung von Kurven, Kopenhag. Abh. X (1899). W. F. Stanley, Math. drawing and measuring instruments, London, 6. Aufl., 1888. Rittershaus, Über Ellipsographen, Verhandl. des Gewerbevereins für Preußen 1874.

2) Über Konstruktionen mit diesem vgl. namentlich G. de Longchamps, Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre. Paris 1890.

3) Archiv d. Math. u. Phys. (2) I (1884), p. 1.

4) Vgl. auch Samueli, Triangoli et rettangoli calcolatori. Firenze 1897.

ob er, wie bei Nicomedes mit einer materiellen Führung versehen ist, oder ob er aus einem Lineal oder Papierstreifen[1]) mit zwei Marken besteht[2]), oder aus einem Zirkel mit drei Spitzen[3]), immer wird der bewegliche Teil PV (s. Fig. S. 82) mit einem Punkt V längs einer Geraden $[OV]$, mit einer Geraden $[PV]$ durch einen Punkt R geführt; und der Schnittpunkt der von einem Punkte P auf $[PV]$ beschriebenen Kurve mit (in der Regel) einer Geraden $[OV]$ gesucht. Da es nur darauf ankommt drei Koinzidenzen zu erreichen: $[PV]$ durch R, V auf $[OV]$, P auf $[OP]$, kann man irgend zwei derselben zur Führung benutzen; so wird bei Amadoris Dreiteiler P auf $[OP]$, V auf $[OV]$ geführt, bis $[PV]$ durch R geht (S. 82[1])). Als erzeugte Linie ist in diesem Fall die Enveloppe der Geraden $[PV]$ anzusehen. Beruhen die beschriebenen Vorrichtungen auf den Einschiebungen der Alten, so zeigt sich in zwei weiteren Dreiteilern ein neuer Gedanke. Der Dreiteiler von Nicholson[4]) besteht aus einem T-förmigen Lineal $PQRS$, das man mit seinem Längsteil $[PQ]$ durch einen Punkt O, mit dem einen Endpunkt S des Querteils $[RS]$



auf einer Geraden $[ST]$ gleiten läßt; der andere Endpunkt R beschreibt die Kurve (Polyode). Wählt man also die Leitgerade $[ST]$ parallel dem einen Schenkel $[OV]$ eines gegebenen Winkels UOV, und zwar im Abstande $QS = QR$, so wird der Winkel durch $[OQ]$ und $[OS]$ triseziert, wenn R auf dem andern Schenkel $[OU]$ liegt. Daß der Punkt S die besagte Parallele beschreibt, wird nun in sehr einfacher Weise bei einem andern Instrument erreicht[5]), indem noch

1) Adler l. c.

2) Alsidschi (972); s. Cantor II, p. 75. Montucla l. c.

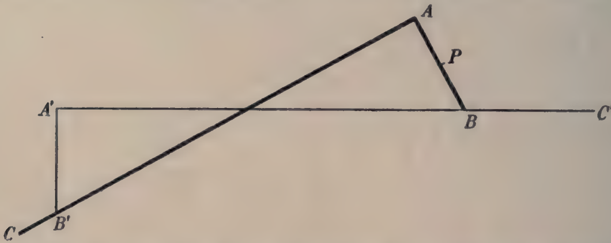
3) Hermes s. Dycks Katalog, p. 225. Ein ähnliches Instrument von Luczak ist 1907 patentamtlich geschützt!. Vgl. hierüber D. Math. Ver. 16, 1907, p. 401; 17, 1908, p. 275.

4) The Analyst 10 (1883).

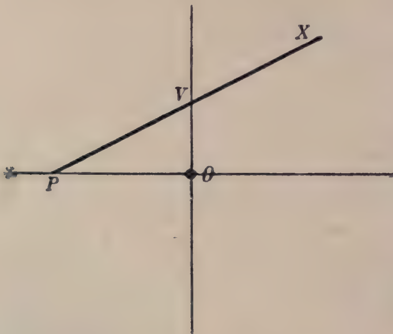
5) S. Good Arthur, La science amusante. Große (Hoffmanns Ztschr. f. math. u. naturw. Unt. 35 (1904), p. 307) gibt an, daß er dies Instrument durch den Mathematiker Müller des Norddeutschen Lloyd kennen gelernt hat.

der Halbkreis um S mit SQ als Radius hinzugefügt wird, der ja den Schenkel $[OV]$ berührt. Natürlich kann man entweder R an $[OU]$[1]) oder den Kreis an $[OV]$ gleiten lassen; letzteres ist genauer, da sich der Schnittpunkt der von R beschriebenen Linie mit $[OU]$ genauer als der Moment der Berührung von Kreis und Gerade feststellen läßt. Man kann dabei das Lineal $[OV]$ zugleich zur Führung des tangierenden Kreisstückes und seinen Endpunkt O zur Führung der Kante $[PQ]$ benutzen. Durch wiederholte Anwendung beider Instrumente kann man auch die Teilung in mehr Teile ausführen.

Auf der Führung eines Punktes auf einer Geraden, einer Geraden durch einen Punkt beruht auch Newtons Zissoidenzirkel (s. S. 100[3]): ein Winkelhaken BAC gleitet mit B auf einer Geraden $[A'C']$, mit $[AC]$ durch einen Punkt B', für den $A'B' = AB$ ist. Dann beschreibt der Mittelpunkt P von AB eine Zissoide.



Auch die dritte der mit Punkten und Geraden möglichen Führungen: zwei Punkte gleiten auf zwei Geraden, ist wirklich angewandt worden, nämlich bei dem Ellipsenzirkel von Leonardo da Vinci.[2]) Er beruht auf dem Satze: Beschreibt eine Strecke PV mit ihren Endpunkten zwei zueinander senkrechte Gerade $[OV]$, $[OP]$, so beschreibt jeder Punkt X von $[PV]$ eine Ellipse mit den Achsen $[OV]$, $[OP]$, den Halbmessern XV, XP. Das Instrument ist natürlich, da es auf einer Einschiebung einer Strecke PV von gegebener Länge beruht, auch ohne Zeichnung einer Ellipse sofort zur Trisektion zu benutzen, genau wie der Amadorische Dreiteiler (s. o.). Aber auch



1) S. Enriques l. c., p. 250.

2) Daß Leonardo (1452—1519) der Erfinder dieses Instrumentes oder vielmehr des darauf beruhenden, noch heute gebräuchlichen Ovaldrehwerkes ist, gibt Lomazzo an in seiner Schrift: Idea del tempio della pittura 1590, p. 17, mit Berufung auf Melzi, einen Schüler Leonardos. — Das Prinzip war (siehe Chasles, Aperçu, p. 49) schon Proklus bekannt (s. Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum Commentarii ed. Friedlein, Leipzig 1873, p. 106)

von dieser besonderen Handhabung des Instruments abgesehen, ist die Ellipsenerzeugung damit gewiß nicht weniger einfach wie die oben besprochenen Konchoiden- und Zissoidenerzeugungen. Die Newtonsche Bevorzugung dieser Kurven (S. 96, 97) wegen ihrer leichteren Erzeugung wird hinfällig.

Eine allgemeinere Art der Erzeugung durch ein eingliedriges Instrument behandelt De la Hire[1]): er läßt das bewegliche Stück mit einer Geraden durch einen festen Punkt gleiten, aber mit einem Punkte eine *Kurve* beschreiben.

Von mehrgliedrigen Kegelschnittzirkeln erwähnen wir nur noch die zwei- und dreigliedrigen Ellipsen- und Hyperbelzirkel von Fr. van Schooten[2]), die Fadenkonstruktionen der Kegelschnitte[3]), einen auf einer Gradführung des Punktes V (Fig. S. 138) durch einen Gelenkmechanismus und Kreisführung der Mitte von PV beruhenden fünfgliedrigen Ellipsographen von Burstow[4]), die projektiven Kegelschnittzirkel von W. Jürges[5]) und von A. Schlamp[6]), deren ersterer auf der projektiven Fundamentaleigenschaft der Kegelschnitte beruht, während der zweite die Erzeugung von W. Braikenridge und C. MacLaurin[7]) verwendet: Drehen sich die Seiten eines Dreiecks um drei feste Punkte und beschreiben zwei seiner Ecken gerade Linien, dann beschreibt die dritte einen Kegelschnitt; ferner nennen wir diejenigen Kegelschnittzirkel, bei denen der Kegelschnitt als Schnitt eines Rotationskegels mit der Zeichenebene auftritt[8]), sog. Conographen, richtiger Conotomographen[9]) (d. i. Kegelschnittzeichner),

Cevas Erzeugung der anomalen Zykloiden[10]) s. S. 82[2]). Eine

---

und die Ausführung eines darauf beruhenden Instrumentes nicht unwahrscheinlich (s. v. Braunmühl l. c.). — Auch Guido Ubaldi (Planisphäricorum universalium theorica, Pisauri 1579, p. 118) gibt ein solches an. — Über räumliche Verallgemeinerungen s. Dupin, J. de l'éc. pol. 14 (1808), p. 45.

1) Mém. de l'Ac. 1708, p. 32; s. auch Réaumur, ib. p. 197.

2) De organica conicarum sectionum in plano descriptione tractatus 1675.

3) Für die Parabel zuerst bei Isidor von Milet, für die Ellipse bei Alhasan (850). 4) S. Stanley l. c., Dyck l. c., p. 230.

5) Schlöm. Ztschr. 38 (1893), p. 350.

6) Die Entstehung der Kegelschnitte nach Maclaurin und Graßmann. Programm. Darmstadt 1908. 7) S. hierüber E. Kötter l. c., p. 15.

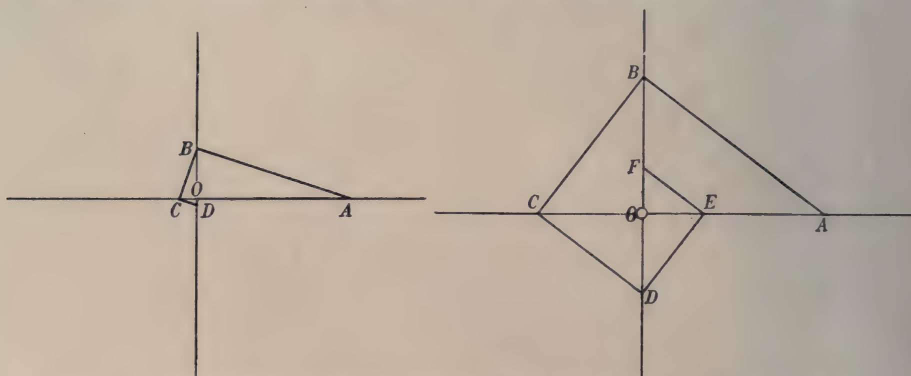
8) Zuerst bei den Arabern; s. Fr. Woepcke, Trois traités arabes sur le compas parfait, publiés et traduits, 1874; später bei Fr. Barozzi (1586), Bessoni (1578), Chr. Scheiner (um 1600), B. Bramer (1684), und in der neuesten Zeit hat noch Hildebrandt den Zirkel nacherfunden. (Dinglers polytechn. Journ. 282, p. 241; Dyck l. c., p. 229.)

9) Nach v. Braunmühls Vorschlag, s. dessen historische Skizze dieser Instrumente in Schlöm. Ztschr. 35 (1890), Hist. litt. Abt. p. 161.

10) Dieses naheliegende, aber wegen seiner Vielgliedrigkeit nicht praktische Instrument hat auch Newton (Arithm. univ. 1732 Probl. XXIX); jüngst wurde es als Clausscher Winkel patentamtlich geschützt! (s. A. Korselt, Schlöm. Ztschr. 42 (1897), p. 276, 43 (1898), p. 318).

ganze Reihe von Instrumenten zur Kurvenerzeugung hat Suardi[1]). Er hat Instrumente zur Beschreibung der Zykloiden, Konchoiden, Zissoiden, Kreiskonchoiden, Kardioiden, Quadratrix, der logarithmischen Linie, der Traktrix.[2]) Eine systematische Erzeugung der höheren algebraischen Kurven gab Maclaurin[3]), im Anschluß an einige Newtonsche[4]) Sätze über Erzeugung von Kurven dritter und vierter Ordnung. Durch Gelenkmechanismen erzeugen Kurven bis zum sechsten Grade Hart, Clifford, Roberts, Cayley, jede algebraische Kurve Kempe[5]), speziell $x^{\frac{h}{k}}$ Freeland[6]).

Von gleichung-lösenden Vorrichtungen[7]), die nicht der Kurvenerzeugung dienen, erwähnten wir schon oben (S. 77) die von Plato zur Kubikwurzelausziehung. Um zwischen OA und OD zwei mittlere Proportionalen OB, OC einzuschalten, müßte man ABC und BCD zu Rechten machen. Das geschieht durch ein verschiebbares Recht-



eck, das mit zwei Ecken auf $[OB]$ und $[OC]$ gleitet und dessen eine

1) Conte Gianbattista Suardi, Nuovi istromenti per la descrizione di diverse curve antiche e moderne usw. Brescia 1752.

2) Bei den beiden letzteren kommt statt des Zeichenstiftes ein scharfes Rädchen zur Anwendung, wie es heute bekanntlich bei einer Reihe graphischer Integratoren verwendet wird, und ein prinzipiell wichtiger Bestandteil derselben ist. Vor Suardi hatte schon Marchese Poleni ein solches Instrument (s. Mehmke, Schlöm. Ztschr. 35 (1890), p. 317). Neuerdings gab Klerity einen darauf beruhenden Tractoriographen an (Dinglers polytechn. Journal 305 (1897), p. 200), der im Grunde der von Suardi ist (s. auch A. Korselt, Schlöm. Ztschr. 35 (1890), p. 18). 3) Colin Mac-Laurin (1698—1746), Geometria organica seu descriptio linearum curvarum universalis. Lond. 1720.

4) Opera omnia I, p. 556. 5) Durch lineale Mechanismen H. Grassmann, Ausdehnungslehre (Leipzig 1844); Crelles J. 31 (1846), p. 111; 36 (1848), p. 177; 42 (1851), p. 187; Werke (hrsg. v. Fr. Engel, Leipzig I, 1 (1984), p. 244, II, 1 (1904), p. 49, 73, 80. 6) Am. J. 3 (1881), p. 326. Projektionen ebener Kurven s. Delaunay, Schlöm. Ztschr. 40 (1895), p. 242.

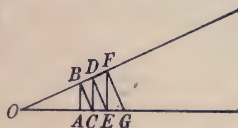
7) Hier können nur einige einfache Apparate betrachtet werden, die sich an diejenigen der Alten anschließen. Im übrigen verweisen wir für dieses Gebiet auf den Artikel von Mehmke, Enzykl. d. math. Wiss. I p. 938.

Seite durch A geht; es wird so lange um A gedreht, bis die Seite $[CD]$ durch den gegebenen Punkt D geht. Man kann dasselbe offenbar mit zwei rechten Winkeln erreichen, deren einen man in die Lage ABC, den anderen in die Lage BCD bringt.

In dieser Auffassung ist das Verfahren verallgemeinerungsfähig. Um z. B. eine fünfte Wurzel zu ziehen, oder, was dasselbe ist, zwischen zwei Strecken OA, OF vier geometrische Mittel einzuschalten, bringe man vier rechte Winkel in die Lagen ABC, BCD, CDE, DEF, dann ist (Fig. S. 140)

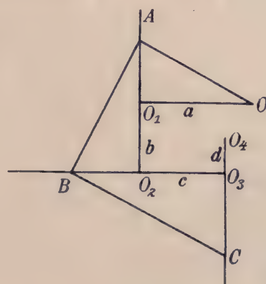
$$OA : OB = OB : OC = OC : OD = OD : OE = OE : OF.$$

Descartes[1]) hat ein ähnliches Verfahren mit rechten Winkeln; er braucht aber im vorliegenden Falle deren fünf. Bringt man sie in die Lage OAB, OBC, OCD, ODE, OEF usw., so ist:



$$OA : OB = OB : OC = OC : OD = OD : OE \text{ usw.}$$

Von Interesse ist aber, daß sich der Grundgedanke auf die Auflösung polynomischer Gleichungen ausdehnen läßt. Um das z. B. für die kubische Gleichung $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ zu zeigen, betrachten wir die Figur, in welcher der rechtwinklige Linienzug $OO_1O_2O_3O_4$ die Seiten a, b, c, d hat. Ist



$$\operatorname{tg} AOO_1 = x,$$

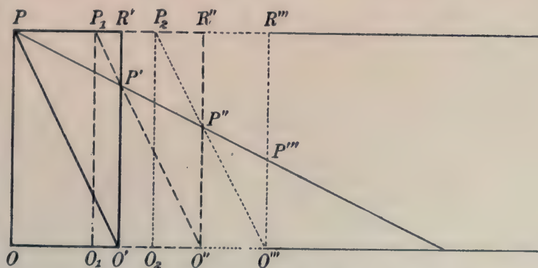
dann ist

$$O_1A = ax, \quad O_2A = ax + b,$$

also:

$$O_2B = ax^2 + bx,$$
$$O_3B = ax^2 + bx + c,$$
$$O_3C = ax^3 + bx^2 + cx,$$
$$O_4C = ax^3 + bx^2 + cx + d;$$

also muß man die rechten Winkel OAB, ABC in solche Lage bringen, daß der Schenkel BC durch O_4 geht, dann ist die Gleichung aufgelöst. Natürlich ist ein negatives a nach rechts, ein negatives b nach oben, ein negatives c nach links, ein negatives d nach unten anzutragen.[2])



Descartes' Apparat steht auch in Analogie zu dem Mesolabium des Erathostenes (siehe S. 77), das ebenfalls der Einschaltung von zwei geometrischen Mitteln diente. Drei kongruente Rechtecke $OPO'R'$, $O_1P_1O''R''$, $O_2P_2O'''R'''$ sind zwischen

1) Geometria, lib. II. 2) E. Lill, Nouv. ann. (2) (1867), VI p. 359.

zwei parallelen Schienen $[OO_1O_2]$, $[PP_1P_2]$ verschiebbar; man bringe sie in die Lage, daß

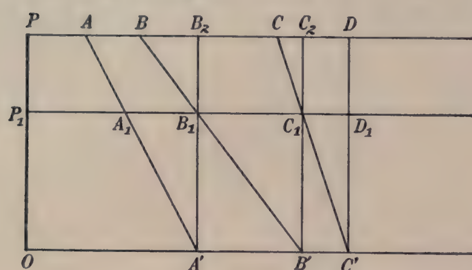
$$P, P' = ([O'R'][O'P_1]), \quad P'' = ([O''R''][O'''P_2])$$

in einer Geraden liegen; dann ist offenbar

$$OP : O'P' = O'P' : O''P'' = O''P'' : O'''P'''.$$

Auch dieser Apparat ist wieder der Verallgemeinerung fähig. Zunächst kann man ihn zur Ausziehung der n^{ten} Wurzel bzw. zum Einschalten von $n-1$ geometrischen Mitteln anwenden, wenn man statt dreier n Rechtecke nimmt.

Aber auch der Apparat von J. Rowning[1]) zur Auflösung von polynomischen Gleichungen beruht auf einem ähnlichen Grundgedanken, der sich übrigens schon bei J. A. v. Segner findet.[2]) Es sei



$$APO = POA' = 1 \text{ Rechten},$$
$$OP = 1, \; PP_1 = x,$$
$$PA = a,$$
$$AB = b, \; BC = c, \; CD = d,$$

so ist

$$C_1D_1 = d(1-x),$$
$$BC_2 = c + d - d(1-x) = c + dx,$$
$$B_1C_1 = (c+dx)(1-x),$$
$$AB_2 = b + c + d - d(1-x) - (c+dx)(1-x) = b + cx + dx^2,$$
$$A_1B_1 = (b + cx + dx^2)(1-x),$$
$$P_1A_1 = a + b + c + d - d(1-x) - (c+dx)(1-x) - (b+cx+dx^2)(1-x)$$
$$= a + bx + cx^2 + dx^3.$$

Man muß also $[P_1A_1]$ so parallel verschieben, daß A_1 in P_1 fällt.

Kapitel V.

Teilung des Kreises, der Lemniskate, der Lemniskatoide; exzentrische Kreisteilung.

Kreisteilung.

Eine der wichtigsten und interessantesten Konstruktionsaufgaben ist die Teilung des ganzen Kreises in eine gegebene Anzahl gleicher Teile mit Lineal und Zirkel, oder wenn man den zu teilenden Kreis als

1) Philosophical Transactions 1770 Vol. 60 (London 1771), p. 240.

2) Methodus simplex et universalis omnes omnium aequationum radices detegendi, Novi Comment. Acad. Scient. Imp. Petrop. VII (1758/59), p. 211.

gezeichnet annimmt, mit dem Lineal allein.[1]) Im Altertum war nur die Teilung des Kreises in 3, 5, 15 gleiche Teile und in die durch fortgesetztes Bogenhalbieren erhaltenen Anzahlen: $3 \cdot 2^\alpha$, $5 \cdot 2^\alpha$, $15 \cdot 2^\alpha$ gelungen. Von Potenzen von 2 kann man natürlich absehen; außerdem kann man die Teilung in nm Teile, wenn m und n teilerfremd sind, zurückführen auf die Teilung in m und die Teilung in n Teile. Denn bestimmt man, was stets möglich, die ganzen Zahlen u und v aus der Diophantischen Gleichung:

$$mv - nu = 1,$$

so ist der mn^{te} Teil des Kreisumfanges gleich:

$$\frac{v}{n} - \frac{u}{m}$$

desselben, also konstruierbar, wenn $\frac{1}{m}$ und $\frac{1}{n}$ des Kreisumfanges konstruiert werden können.

Umgekehrt ist mit der mn-Teilung durch Zusammenfassung von n bzw. m Teilen zugleich die m- und die n-Teilung gegeben. Demnach ist nur noch die Frage, für welche Primzahlpotenzen p^α die Teilung ausführbar ist, d. h. für welche Primzahlpotenzen p^α die Größen $\cos\frac{2h\pi}{p^\alpha}$, $\sin\frac{2h\pi}{p^\alpha}$, also auch

$$x = \cos\frac{2h\pi}{p^\alpha} + i\sin\frac{2h\pi}{p^\alpha}$$

quadratisch irrational sind; oder, da nach dem Moivreschen Satze [2]) $x^{p^\alpha} = 1$ ist, für welche p^α dieser Gleichung durch einen Quadratwurzelausdruck genügt werden kann.

Unter den p^α Wurzeln dieser Gleichung sind die sämtlichen Wurzeln der Gleichung:

$$x^{p^{\alpha-1}} - 1 = 0$$

enthalten; wir können demnach durch $x^{p^{\alpha-1}} - 1$ dividieren und bekommen:

$$\frac{x^{p^\alpha} - 1}{x^{p^{\alpha-1}} - 1} = x^{p^{\alpha-1}(p-1)} + x^{p^{\alpha-1}(p-2)} + \cdots + x^{p^{\alpha-1}} + 1 = 0.$$

Es fragt sich zunächst, ob diese Gleichung weiter reduktibel ist. Um das entscheiden zu können, müssen wir zwei Sätze von Gauß und Eisenstein vorausschicken:

---

1) Das projektive Analogon dieser Aufgabe (vgl. S. 49, 73 u. 104) lautet: In einen gegebenen Kegelschnitt ein n-Eck $(1\,2\,3 \ldots n)$ so einzubeschreiben, daß die Punkte $([h, i+k]\,[h+i, k])$ auf einer gegebenen Geraden liegen. Die S. 95 ausgeführten Ellipsenteilungen sind von dieser Art, die gegebene Gerade unendlich fern.

2) S. Kap. III des sechsten Teiles.

Der *Gauß*sche *Satz*[1]) lautet: „Das Produkt zweier primitiver Funktionen ist wieder eine primitive Funktion."

Beweis: Es seien

$$f(x) = a_0 x^l + a_1 x^{l-1} + \cdots + a_l$$

und

$$g(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m$$

zwei primitive Funktionen, d. h. es seien $a_0, a_1, \ldots, a_l$ teilerfremde ganze Zahlen und $b_0, b_1, \ldots, b_m$ teilerfremde ganze Zahlen. Dann ist für irgendeine Primzahl p etwa:

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{i-1}, \quad \text{aber nicht } a_i$$

und

$$b_0, \quad b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_{k-1}, \quad \text{aber nicht } b_k$$

durch p teilbar.

Also sind die ersten $i + k$ Koeffizienten von $f(x)g(x)$:

$a_0 b_0$,

$a_0 b_1 + a_1 b_0$,

. . . .

$a_0 b_{i+k-1} + a_1 b_{i+k-2} + \cdots + a_{i-1} b_k + a_i b_{k-1} + \cdots + a_{i+k-1} b_0$,

aber nicht

$$a_0 b_{i+k} + a_1 b_{i+k-1} + \cdots + a_{i-1} b_{k+1} + a_i b_k + a_{i+1} b_{k-1} + \cdots + a_{i+k} b_0$$

durch p teilbar.

Demnach ist $f(x)g(x)$ ebenfalls eine primitive Funktion.

Läßt sich also die ganze ganzzahlige Funktion

$$x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n$$

in zwei ganze Faktoren mit *rationalen* Koeffizienten zerlegen

$$x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n = \frac{(a_0 x^l + a_1 x^{l-1} + \cdots + a_l)(b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m)}{a_0 b_0},$$

so muß $a_0 b_0 = 1$ sein, da sonst die primitiven Funktionen $a_0 x^l + \cdots$ und $b_0 x^m + \cdots$ ein nicht primitives Produkt $a_0 b_0 (x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots)$ hätten.

Der *Eisenstein*sche *Satz*[2]) bietet ein Kriterium für die Reduktibilität einer ganzen ganzzahligen Funktion; er lautet:

„Sind die sämtlichen Koeffizienten c einer ganzen ganzzahligen Funktion:

$$f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \cdots + c_n$$

1) Gauß, Disquisitiones arithmeticae, Sectio II, art. 42 = Werke I, p. 34.

2) Crelles J. 39 (1850), p. 166. Hier auch die Irreduktibilität der Kreis- und der Lemniskaten-Teilungsgleichung.

durch eine Primzahl p teilbar, dagegen c_n nicht durch p^2, so ist die Funktion irreduktibel."

Beweis: Angenommen, es bestände folgende Zerlegung:

$$f(z) = (z^l + a_1 z^{l-1} + \cdots + a_l)(z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m),$$

dann müssen nach dem Gaußschen Satz die Koeffizienten a und b ganze Zahlen sein. Dann ist:

$$c_n = a_l b_m$$

durch p, nicht durch p^2 teilbar, also eine und nur eine der Zahlen a_l, b_m durch p teilbar; das sei etwa a_l, also b_m nicht durch p teilbar.

Ferner folgt:

$$a_l b_{m-1} + a_{l-1} b_m = c_{n-1},$$

also a_{l-1} durch p teilbar; ebenso:

$$a_l b_{m-2} + a_{l-1} b_{m-1} + a_{l-2} b_m = c_{n-2},$$

also a_{l-2} durch p teilbar, usw. bis

$$a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + \cdots = c_m,$$

durch p teilbar, was wegen $a_0 = 1$, b_m unteilbar durch p, unmöglich ist.

Mit Hilfe dieses Eisensteinschen Satzes läßt sich nunmehr leicht die Irreduktibilität der Kreisteilungsgleichung:

$$\frac{x^{p^\alpha} - 1}{x^{p^{\alpha-1}} - 1} = x^{p^{\alpha-1}(p-1)} + x^{p^{\alpha-1}(p-2)} + \cdots + x^{p^{\alpha-1}} + 1 = 0,$$

wo p eine Primzahl ist, nachweisen.[1]) Durch die Substitution: $x = z + 1$ geht sie über in:

$$(z+1)^{p^{\alpha-1}(p-1)} + (z+1)^{p^{\alpha-1}(p-2)} + \cdots + (z+1)^{p^{\alpha-1}} + 1 = 0.$$

Daraus ergibt sich für $\alpha = 1$:

$$\frac{(z+1)^p - 1}{(z+1) - 1} = (z+1)^{p-1} + (z+1)^{p-2} + \cdots + (z+1) + 1 = 0,$$

oder:

$$z^{p-1} + \binom{p}{1} z^{p-2} + \binom{p}{2} z^{p-3} + \cdots + \binom{p}{2} z + p = 0.$$

Hier sind alle Koeffizienten durch die Primzahl p teilbar, dagegen der letzte nicht durch p^2; also ist nach dem Eisensteinschen Satze diese Gleichung und damit auch die Kreisteilungsgleichung:

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1 = 0$$

irreduktibel.

---

1) Für $\alpha = 1$ zuerst bewiesen von Gauß, Disqu. arith., art. 341 = Werke I, p. 417; dann von Kronecker, Crelles J. 29 (1845), p. 280 = Werke I, p. 1, Liouv. J. (2) 1 (1856), p. 399 = Werke I, p. 99, der allgemeinere Fall Liouv. J. (1) 19 (1854), p. 177 = Werke I, p. 75.

Für $\alpha = 2$ geht die Gleichung über in:

$$(z+1)^{p(p-1)} + (z+1)^{p(p-2)} + \cdots + 1 = 0,$$

oder:

$$\{z^p + 1 + pzf(z)\}^{p-1} + \{z^p + 1 + pzf(z)\}^{p-2} + \cdots + 1 = 0,$$

$$[(z^p+1)^{p-1} + (z^p+1)^{p-2} + \cdots + 1] + pzF(z) = 0,$$

$$\left[z^{p(p-1)} + pz^{p(p-2)} + \binom{p}{2} z^{p(p-3)} + \cdots + \binom{p}{2} z^p + p\right] + pzF(z) = 0,$$

wo $f(z)$ eine ganze ganzzahlige Funktion vom Grade $p-2$, $F(z)$ eine solche vom Grade $p^2 - p - 2$ bezeichnet. Diese Gleichung erfüllt die Bedingungen des Eisensteinschen Satzes, also ist auch:

$$\frac{x^{p^2} - 1}{x^p - 1} = 0, \text{ also auch } \frac{x^{p^\alpha} - 1}{x^{p^{\alpha-1}} - 1} = 0$$

eine irreduktible Gleichung. Mit *einer* Wurzel derselben ist auch jede andere, als Potenz von ihr, ein Quadratwurzelausdruck und mit *einem* Quadratwurzelausdruck genügt auch jeder durch Vorzeichenänderungen daraus hervorgehende der Gleichung. Demnach muß der Grad eine Potenz von 2 sein. Also kommen von den p^α-Ecken als konstruierbar nur die in Betracht, für die

$$p^{\alpha-1}(p-1) = 2^n,$$

d. h. $\alpha = 1$, $p = 2^n + 1$ ist.

Demnach ist ein p^2-, p^3-, ..., p^α-Eck nie konstruierbar und ein p-Eck nur eventuell, wenn:

$$p = 2^n + 1$$

ist. So ist z. B. das reguläre 7-, 9-, 11-, 13-Eck nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar.

Wann ist nun eine Zahl von der Form:

$$p = 2^n + 1$$

eine Primzahl? Ist

$$n = km,$$

wo m eine ungerade Zahl ist, dann ist für $2^k = g$:

$$2^{km} + 1 = g^m + 1 = (g+1)(g^{m-1} - g^{m-2} + \cdots + 1),$$

d. h. p zerlegbar. Demnach muß der Exponent n eine Potenz von 2 sein.

Die Werte $n = 4, 8, 16$ liefern Primzahlen, und Fermat[1]) sprach die Vermutung aus, daß *alle* Zahlen von der Form:

$$2^{2^r} + 1$$

Primzahlen sind. Aber bereits Euler wies nach, daß schon die

1) Briefe an Mersenne u. Frénicle 1640, s. Oeuvres de Fermat (par P. Tannery et Ch. Henry, Paris) I (1891), p. 131; II (1894), p. 205, 212.

Zahl $2^{2^5}+1$ keine Primzahl, sondern das Produkt von zwei Primzahlen $641 \cdot 6700417$ ist; ebenso zeigte Landry, daß

$$2^{2^6}+1 = 274177 \cdot 67280421310721$$

und daß auch $2^{2^7}+1$ zerlegbar ist; Lucas[1]) zeigte, daß $2^{2^{12}}+1$ durch $7 \cdot 2^{14}+1 = 114689$, Pervouchine, daß $2^{2^{23}}+1$ durch

$$5 \cdot 2^{25}+1 = 167772161,$$

Seelhoff, daß $2^{2^{36}}+1$ durch $5 \cdot 2^{39}+1 = 2748779069441$ teilbar ist. In betreff der übrigen Zahlen $2^{2^8}+1, \cdots$ hat man in dieser Beziehung noch nichts ermitteln können.[2])

Also kommen für die Kreisteilung als neu vorläufig nur in Betracht:

das reguläre $2^4+1 = 17$-Eck,
„ „ $2^8+1 = 257$ „
„ „ $2^{16}+1 = 65537$ „

Daß aber Teilungen durch diese Zahlen wirklich möglich sind, hat zuerst Gauß gezeigt.[3])

Ohne auf die allgemeine Theorie der Kreisteilungsgleichungen eingehen zu müssen, können wir diesen geometrisch besonders interessanten Fall sehr einfach, wie folgt, behandeln: Wir schicken zunächst den Eulerschen Begriff der „primitiven Wurzel" für eine Primzahl p voraus. Die Zahl g heißt eine primitive Wurzel für die Primzahl p, wenn die $(p-1)$ ersten Potenzen von g das vollständige Restsystem von p ergeben. So ist z. B. 3 eine primitive Wurzel von der Primzahl 7; denn es ist:

$$\begin{aligned} g^1 &= 3 \equiv 3 \pmod 7, \\ g^2 &= 9 \equiv 2 \pmod 7, \\ g^3 &= 27 \equiv 6 \pmod 7, \\ g^4 &= 81 \equiv 4 \pmod 7, \\ g^5 &= 243 \equiv 5 \pmod 7, \\ g^6 &= 729 \equiv 1 \pmod 7. \end{aligned}$$

1) Lucas, Théorie des nombres (Paris 1891), p. 51. P. Mansion, Nouv. corr. math. V (1879), p. 88, 122.

2) Eisenstein hat den Satz ausgesprochen: Es gibt unendlich viele Primzahlen der Form $2^{2^n}+1$. Eine noch weiter gehende Vermutung ist die, daß alle Zahlen $2+1$, 2^2+1, $2^{2^2}+1$, $2^{2^{2^2}}+1$ usw. Primzahlen sind. Vgl. E. Lucas, Récréations mathématiques II (Paris 1896), p. 235.

3) Gauß l. c., Sectio septima, art. 335 = Werke I, p. 412. Die Gaußsche allgemeine Methode, welche er selbst an dem Fall $p=17$ erläutert hatte, wurde für $p=257$ von Richelot (Crelles J. 9 (1832), p. 1), Cayley, Crelles J. 41 (1851), p. 81, geometrisch von Affolter (Math. Ann. 6 (1873), p. 582) und Pascal (Acc. d. Nap. 1887), für $p=65537$ von Hermes (Gött. Nachr. 1894) durchgeführt.

Daß zu jeder Primzahl p primitive Wurzeln existieren, hat zuerst Euler nachgewiesen.

Dies vorausgeschickt, betrachten wir die Kreisteilungsgleichung:

$$f(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = 0,$$

wo $p = 2^\alpha + 1$ eine Primzahl ist; x sei eine Wurzel dieser Gleichung und g eine primitive Wurzel für p, also $x^{g^0}, x^{g^1}, x^{g^2}, \ldots, x^{g^{p-2}}$ sämtliche Wurzeln.

Stellt man nun den Exponenten von g im *dyadischen* Zahlsystem dar und setzt

$$x^{g^{(i_0 + 2i_1 + 2^2 i_2 + \cdots + 2^{\alpha-1} i_{\alpha-1})}} = x_{2^{\alpha-1} i_0 + 2^{\alpha-2} i_1 + \cdots + i_{\alpha-1}}, \qquad (i_0, \cdots, i_{\alpha-1} = 0, 1)$$

so sind $x_0, x_1, \ldots, x_{2^\alpha - 1}$ sämtliche Wurzeln von $f(x) = 0$. Jetzt sei $(x_0 x_1)$ eine rationale symmetrische Funktion von x_0 und x_1, $(x_2 x_3)$ dieselbe Funktion von x_2 und x_3; $(x_0 x_1 x_2 x_3)$ eine rationale symmetrische Funktion von $(x_0 x_1)$ und $(x_2 x_3)$, $(x_4 x_5 x_6 x_7)$ dieselbe Funktion von x_4, x_5, x_6, x_7 usw., so ist:

$$(x_0 x_1 x_2 x_3 \ldots x_{2^\alpha - 1})$$

eine rationale Funktion, welche offenbar bei jeder Substitution:

$$x \parallel x^{g^{2^\beta}}, \qquad (\beta = 0, 1, \ldots, \alpha - 1)$$

also auch bei jeder aus diesen komponierten Substitution:

$$x \parallel x^{g^i} \qquad (i = 0, 1, \ldots, 2^{\alpha-1})$$

unverändert bleibt, also rational ist. Nun erhält man x_0 durch eine Quadratwurzelziehung aus solchen Funktionen $(x_0 x_1)$, ferner diese $(x_0 x_1)$ durch eine Quadratwurzelziehung aus solchen Funktionen $(x_0 x_1 x_2 x_3)$, usw., also ist schließlich x_0 durch einen Quadratwurzelausdruck darstellbar.[1])

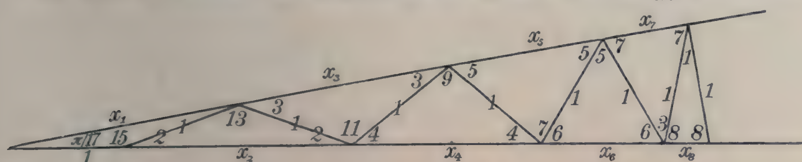
Für das *reguläre Siebzehneck* geben wir außerdem eine ganz elementare Analyse und Konstruktion, welche auf der schon früher (S. 82) für die Drei- und Vielteilung des Winkels und für das 5-, 7-, 9-Eck benutzten Figur zur Vervielfachung des Winkels beruht. Dabei wird auch von dem Gebrauch der trigonometrischen Funktionen abgesehen, so daß diese Herleitung in jedem Lehrbuch der Planimetrie Platz finden könnte.[2])

---

1) Vahlen, Acta math. 21 (1897), p. 293ff.

2) Eine rein geometrische Analyse hat auch A. Padoa (Bull. di Mat. 1903), aber er kommt erst durch Zerlegen einer biquadratischen Gleichung zu Gleichungen zweiten Grades. Eine sehr schöne Analyse muß Erchinger gehabt haben, von dem Gauß (Gött. gel. Anz. 19. Dezember 1825 = Werke II, p. 187) berichtet: „Das eigentlich Verdienstliche der Abhandlung des Hrn. Erchinger besteht . . . in der rein geometrischen Begründung . . . und diese ist mit so

In der nachstehenden Figur ist für φ der Winkel $\frac{\pi}{17}$ genommen

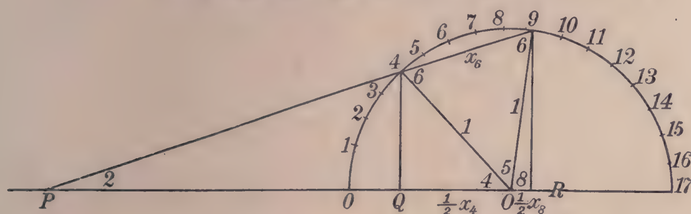


Dann liefern die Basiswinkel der aufeinanderfolgenden gleichschenkligen Dreiecke der Reihe nach die Winkel:

$$\frac{\pi}{17}, \frac{2\pi}{17}, \frac{3\pi}{17}, \frac{4\pi}{17}, \frac{5\pi}{17}, \frac{6\pi}{17}, \frac{7\pi}{17}, \frac{8\pi}{17},$$

so daß im letzten Dreieck der Winkel an der Spitze wieder $\frac{\pi}{17}$ beträgt. Bezeichnet man die Basen der einzelnen Dreiecke, deren Schenkel alle gleich 1 sind, mit:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8,$$



so lassen sich für diese acht Größen aus der Figur des regulären 34-Ecks (s. Fig.) eine Reihe einfacher Relationen herleiten.

Zieht man nämlich z. B. die Gerade [9, 4], welche [0 O] in P schneiden möge, so ist:

$$\sphericalangle 4 O\ 9 = \frac{5\pi}{17},$$

$$\sphericalangle 4 O\ 0 = \frac{4\pi}{17},$$

$$\sphericalangle 9 O 17 = \frac{8\pi}{17},$$

und infolgedessen:

$$\sphericalangle O 4 9 = \sphericalangle O 9 4 = \frac{6\pi}{17} \quad \text{und} \quad \sphericalangle 4 P O = \frac{2\pi}{17}.$$

Ferner folgt:

$$\overline{49} = x_6,$$

und wenn Q und R die Fußpunkte der von 4 und 9 auf [$P O$] gefällten Lote bedeuten:

---

musterhafter mühsamer Sorgfalt, alles nicht rein Elementarische zu vermeiden, durchgeführt, daß usw." Leider war mir diese Abhandlung unzugänglich; sie ist auch sonst nirgends beachtet worden.

$$OQ = \frac{1}{2} x_4 \quad \text{und} \quad OR = \frac{1}{2} x_8 .$$

Folglich ergibt sich aus der Figur die Relation:

$$\frac{1}{2} x_2 : 1 = \frac{1}{2} (x_4 + x_8) : x_6$$

oder:

$$x_2 x_6 = x_4 + x_8 . \tag{1}$$

Analoge Relationen ergeben sich für jedes Produkt von je zweien der Größen $x_1, x_2, \ldots, x_8$; wir stellen sie in der folgenden Multiplikationstabelle zusammen:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	$2 + x_2$	$x_1 + x_3$	$x_2 + x_4$	$x_3 + x_5$	$x_4 + x_6$	$x_5 + x_7$	$x_6 + x_8$	$x_7 - x_8$
x_2	$x_1 + x_3$	$2 + x_4$	$x_1 + x_5$	$x_2 + x_6$	$x_3 + x_7$	$x_4 + x_8$	$x_5 - x_8$	$x_6 - x_7$
x_3	$x_2 + x_4$	$x_1 + x_5$	$2 + x_6$	$x_1 + x_7$	$x_2 + x_8$	$x_3 - x_8$	$x_4 - x_7$	$x_5 - x_6$
x_4	$x_3 + x_5$	$x_2 + x_6$	$x_1 + x_7$	$2 + x_8$	$x_1 - x_8$	$x_2 - x_7$	$x_3 - x_6$	$x_4 - x_5$
x_5	$x_4 + x_6$	$x_3 + x_7$	$x_2 + x_8$	$x_1 - x_8$	$2 - x_7$	$x_1 - x_6$	$x_2 - x_5$	$x_3 - x_4$
x_6	$x_5 + x_7$	$x_4 + x_8$	$x_3 - x_8$	$x_2 - x_7$	$x_1 - x_6$	$2 - x_5$	$x_1 - x_4$	$x_2 - x_3$
x_7	$x_6 + x_8$	$x_5 - x_8$	$x_4 - x_7$	$x_3 - x_6$	$x_2 - x_5$	$x_1 - x_4$	$2 - x_3$	$x_1 - x_2$
x_8	$x_7 - x_8$	$x_6 - x_7$	$x_5 - x_6$	$x_4 - x_5$	$x_3 - x_4$	$x_2 - x_3$	$x_1 - x_2$	$2 - x_1$

Aus dem großen gleichschenkligen Dreieck der ersten Figur folgt ferner:

$$x_1 + x_3 + x_5 + x_7 = 1 + x_2 + x_4 + x_6 + x_8$$

oder:

$$x_1 + x_3 + x_5 + x_7 - x_2 - x_4 - x_6 - x_8 = 1 . \tag{2}$$

Ferner wird

$$(x_2 + x_8)(x_4 - x_1) = x_2 x_4 + x_4 x_8 - x_1 x_2 - x_1 x_8$$

mit Rücksicht auf die Multiplikationstabelle gleich:

$$x_2 + x_6 + x_4 - x_5 - x_1 - x_3 - x_7 + x_8 ,$$

also wegen (2):

$$(x_2 + x_8)(x_4 - x_1) = -1 ,$$

und ebenso erhält man:

$$(x_7 - x_6)(x_3 + x_5) = -1 . \tag{3}$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned}(x_2 + x_8 + x_4 - x_1)(x_3 + x_5 - x_6 + x_7) = {} & x_1 + x_5 + x_3 + x_7 - x_4 - x_8 + x_5 - x_8 \\ & + x_5 - x_6 + x_3 - x_4 + x_3 - x_2 + x_1 - x_2 \\ & + x_1 + x_7 + x_1 - x_8 - x_2 + x_7 + x_3 - x_6 \\ & - x_4 - x_2 - x_6 - x_4 + x_5 + x_7 - x_6 - x_8 ,\end{aligned}$$

also wegen (2):

$$(x_2 + x_8 + x_4 - x_1)(x_3 + x_5 - x_6 + x_7) = 4. \tag{4}$$

Nun lassen sich quadratische Gleichungen für die Größen x_1, $x_2, \ldots, x_8$ angeben, und zwar:

I.

Zu x_2 und x_8 gehört die Gleichung:

$$x^2 - z_1 x + z_1' = 0,$$

wo

$$z_1 = x_2 + x_8 = x_3 x_5,$$

$$z_1' = x_2 x_8 = x_6 - x_7$$

ist.

II.

Zu x_6 und $-x_7$ gehört die Gleichung:

$$x^2 - z_1' x + z_2 = 0,$$

wo

$$z_1' = x_6 - x_7 = x_2 x_8,$$

$$z_2 = -x_6 x_7 = x_4 - x_1$$

ist.

III.

Zu x_4 und $-x_1$ gehört die Gleichung:

$$x^2 - z_2 x + z_2' = 0,$$

wo

$$z_2 = x_4 - x_1 = -x_6 x_7,$$

$$z_2' = -x_1 x_4 = -x_3 - x_5$$

ist.

IV.

Zu $-x_3$ und $-x_5$ gehört die Gleichung:

$$x^2 - z_2' x + z_1 = 0,$$

wo

$$z_2' = -x_3 - x_5 = -x_1 x_4,$$

$$z_1 = x_3 x_5 = x_2 + x_8$$

ist.

Die Größen

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= x_2 + x_8, \\ z_2 &= x_4 - x_1 \end{aligned}\right\}$$

genügen wegen (3) wiederum einer quadratischen Gleichung:

$$z^2 - y_1 z - 1 = 0,$$

wo

$$y_1 = z_1 + z_2 = x_2 + x_4 + x_8 - x_1$$

ist, und die Größen:

$$\left.\begin{aligned} z_1' &= x_6 - x_7, \\ z_2' &= -x_3 - x_5 \end{aligned}\right\}$$

genügen wegen (3) der quadratischen Gleichung:

$$z^2 - y_2 z - 1 = 0,$$

wo

$$y_2 = z_1' + z_2' = x_6 - x_3 - x_5 - x_7$$

ist.

Die Größen y_1 und y_2 endlich genügen noch wegen (2) und (4) der quadratischen Gleichung:

$$y^2 + y - 4 = 0.$$

Nun ist:

$$y_2 = x_6 - x_3 - x_5 - x_7 < 0,$$

da ja bereits $x_3 > x_6$ ist; folglich muß:

$$y_1 = x_2 + x_4 + x_8 - x_1 > 0$$

sein, da ja $y_1 y_2 = -4$ ist; also ist:

$$y_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17},$$

$$y_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17},$$

$$y_1 - y_2 = +\sqrt{17}.$$[1]

Ferner folgt, da

$$z_1 > 0, \; z_2 < 0, \; z_1 + z_2 = y_1 > 0$$

ist, daß

$$z_1 > |z_2|$$

ist; und da

$$z_2' < 0, \; z_1' > 0, \; z_1' + z_2' = y_2 < 0$$

ist, daß $|z_2'| > z_1'$ ist.

Durch diese elementare Analysis haben wir die Kette von quadratischen Gleichungen gewonnen, durch deren sukzessive Auflösung man die Größen x erhält. Alle bekannten Konstruktionen knüpfen hieran an. Die ältesten sind wohl die von Gauß erwähnte Paukersche und die von Gauß besprochene Erchingersche[2]):

Es sei $AB = 1$; dann konstruiere man die Punkte C und D auf $[AB]$ so, daß:

$$AC \cdot BC = AD \cdot BD = 4AB^2 = 4 \quad \text{und} \quad BC > AC$$

wird; das geschieht z. B. mit Hilfe des Sekanten-Tangentensatzes. Dann ist:

$$AC = BD = y_1 \quad \text{und} \quad AD = BC = -y_2,$$

denn es ist:

$$BC - AC = 1$$
$$BC \cdot AC = 4$$
$$BC > AC.$$

Konstruiert man dann weiter den Punkt E auf $[AB]$, so daß:

$$AE \cdot CE = AB^2 = 1, \quad AE > CE$$

---

1) Bekanntlich hat die Vorzeichenbestimmung in der entsprechenden allgemeineren Gleichung besondere Schwierigkeiten gemacht; s. Gauß, Summatio quarundam serierum singularium (Werke II, p. 9); in dem vorliegenden speziellen Fall ergibt sie sich, wie man sieht, ohne weiteres.

2) Gött. gelehrte Anz. 19. Dezember 1825 = Werke II, p. 186. Erchinger, Geometrische Konstruktion des regelmäßigen Siebenzehnecks. Pauker, Elementargeometrie, Mitau.

ist, so ist:

$$AE = z_1, \quad CE = -z_2,$$

denn es ist:

$$AE \cdot CE = 1,$$
$$AE - CE = AC = y_1,$$
$$AE > CE.$$

Ferner konstruiere man F so, daß:

$$AF \cdot DF = AB^2 = 1, \quad AF < DF$$

ist, dann ist:

$$AF = z_1', \quad DF = -z_2',$$

denn es ist:

$$AF \cdot DF = 1,$$
$$DF - AF = AD = -y_2,$$
$$AF < DF.$$

Endlich liefert die Konstruktion des Punktes J, für den

$$AJ \cdot EJ = AB \cdot AF, \quad AJ < EJ$$

ist:

$$AJ = x_8$$
$$EJ = x_2,$$

denn es ist:

$$AJ \cdot EJ = z_1',$$
$$AJ + EJ = AE = z_1 \text{ und}$$
$$AJ < EJ.$$

Ebenso kann man die übrigen Größen x konstruieren; aber es genügt offenbar irgendeine von ihnen, da jede eine Seite bzw. Diagonale des 34-Ecks im Kreise vom Radius 1 ist.

Damit ist die Konstruktion des regelmäßigen Siebenzehnecks mit Zirkel und Lineal ausgeführt.

In dieser Erchingerschen Konstruktion wird eigentlich nur angegeben, nach welchen Bedingungen man der Reihe nach die Punkte C, D, E, F, J zu konstruieren hat, nicht *wie* man das am besten tut. Das kann in sehr verschiedener Weise geschehen; ein sehr kurzer und übersichtlicher Weg ist der folgende. Es sollen nur Kreise verwendet werden, welche durch den Punkt O gehen, für den OA gleich und senkrecht AB ist, und jeder Kreis soll aus $[AB]$ die zwei Wurzeln einer quadratischen Gleichung als Abstände von A ausschneiden. Der Mittelpunkt N des ersten Kreises liegt senkrecht unter der Mitte M von AB im Abstande $MN = 2 \cdot AB = 2$. Er schneidet die Punkte $C(AC = y_1)$, $D(AD = -y_2)$ aus. Der zweite und dritte Kreis haben ihre Mittelpunkte in den Mitten von AC und AD. Der zweite gibt die Punkte

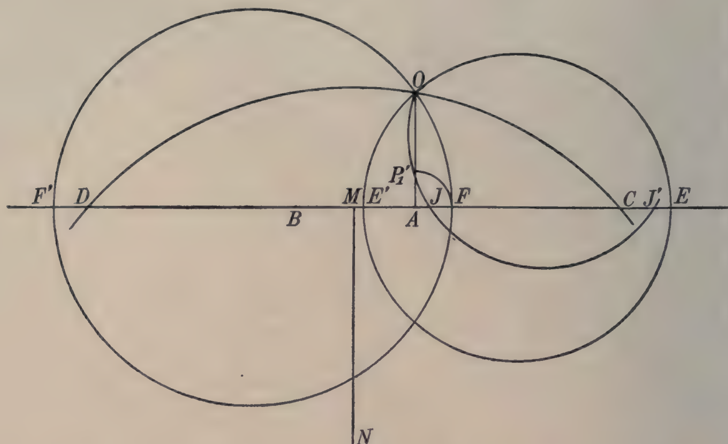
$$E(AE = z_1) \quad \text{und} \quad E'(AE' = -z_2),$$

der dritte die Punkte

$$F(AF = z_1') \quad \text{und} \quad F'(AF' = -z_2').$$

Der vierte Kreis geht durch $P_1'(AP_1' = AF)$ und hat seinen Mittelpunkt mitten über AE. Er gibt die Punkte

$$J(AJ = x_8) \quad \text{und} \quad J'(AJ' = x_2).$$



Drei analoge Kreise geben noch, wenn man will, die übrigen x; nämlich ein Kreis durch $P_1(AP_1 = AE)$, Mittelpunkt mitten über AF' gibt $-x_3$ und $-x_5$; ein Kreis durch $P_2'(AP_2' = AF')$, Mittelpunkt mitten über AE' gibt $-x_1$ und x_4, ein Kreis durch $P_2(AP_2 = AE')$ Mittelpunkt mitten über AF gibt x_6 und $-x_7$.

Konstruktionen des regulären Siebenzehnecks sind unter verschiedenen Gesichtspunkten gegeben worden. Wir erwähnen die Konstruktion von J. Serret[1]), die auch Bachmann[2]) darstellt. Ferner gab v. Staudt[3]) eine Konstruktion mit dem Lineal allein, wenn der zu teilende Kreis gezeichnet vorliegt; ebenso Gérard[4]) eine solche mit dem Zirkel allein; Güntsche[5]) eine geometrographische. Auch eine Konstruktion bloß mit Streckenübertrager oder Einheitsdreher

---

1) Algèbre supérieure II.

2) P. Bachmann, Lehre von der Kreisteilung, Leipzig 1872.

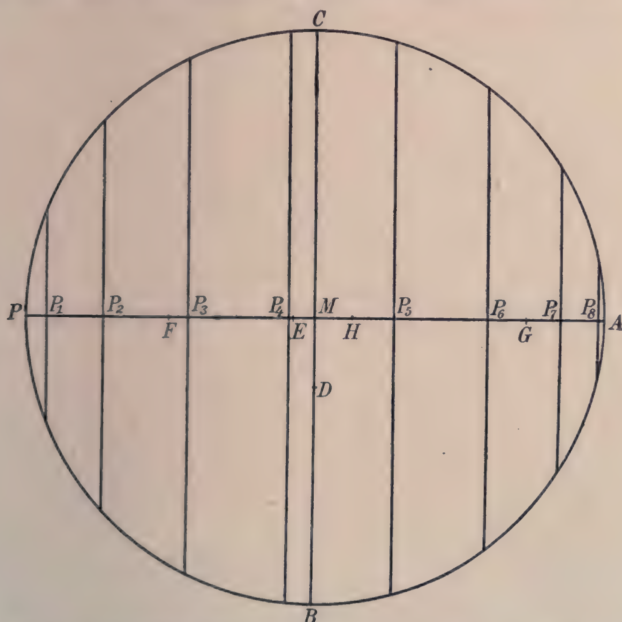
3) Crelles J. 24 (1842), p. 251; bewiesen von Schröter, Crelles J. 75 (1873), p. 13; s. auch Bachmann l. c., F. Klein, Ausgewählte Fragen der Elementargeometrie (Leipzig 1895). Affolter überträgt diese Konstruktion auf alle konstruierbaren Polygone, insbesondere das 257-Eck. Math. Ann. 6 (1873), 582.

4) Math. Ann. 48 (1897), 390.

5) Arch. d. Math. u. Ph. (3) IV (1903), Sitzungsber. d. Berl. Math. Ges. 1 (1902), p. 10.

(s. S. 59) ist nach dem Hilbertschen Satze möglich, d. h. es sind von dem zu teilenden Kreise nur Schnittpunkte mit *Zentralen* zu benutzen.[1])

Diese Konstruktionen bringen zwar, wenigstens z. T. *konstruktive* Vereinfachungen mit sich, aber nicht *gedankliche*, da sie immer nur auf die Konstruktion der Wurzeln der quadratischen Gleichungen ausgehen; das ist eigentlich ein fremdes, algebraisches Element in der ganzen Betrachtung, was beseitigt werden müßte. Nun sahen wir (S. 60), daß das Quadratwurzelausziehen aus Quadratsummen dem Winkelhalbieren äquivalent ist. Man kann daher darauf ausgehen, die Quadratwurzelziehungen durch Winkelhalbierungen zu ersetzen, und da tritt hier der besonders günstige Umstand ein, daß die zwei ersten erforderlichen Halbierungen die *Vierteilung eines* Winkels repräsentieren. Diese Bemerkung von Richmond[2]) ist ein wirklicher Fortschritt in der *geometrischen* Erkenntnis des Siebenzehnecks; es wäre erwünscht, auch für die letzte Quadratwurzelziehung eine einfache *geometrische* Interpretation zu haben, auf Grund deren wahrscheinlich eine wirkliche *rein* geometrische Analysis des Problems durchführbar wäre.



Aus dem Richmondschen Satze kann man das folgende nach dem Vorhergehenden leicht zu bestätigende Resultat ableiten:

1) Für die projektive Aufgabe S. 143¹ heißt das, es dürfen nur von Punkten der gegebenen Geraden aus Tangenten an den Kegelschnitt gelegt werden.

2) Quart. J. of math. 1892, Math. Ann. 67 (1909), p. 459.

Sind $PP_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ die Projektionen der 17 Ecken eines regulären Siebenzehnecks auf den durch die Ecke P gehenden Durchmesser $[PA]$, ferner E die Mitte von P_3P_5, F die Mitte von P_1P_4, G die Mitte von P_6P_7, H die Mitte von P_2P_8, ferner

$$MD = \frac{1}{4} MB,$$

so ist jeder der Winkel EDM, FDM, GDM, HDM (mit Rücksicht auf die Zweideutigkeit des Winkelhalbierens, also Vierdeutigkeit des Winkelviertelns) ein Viertel des Winkels $PDM = \alpha$, und zwar

$$EDM = \frac{1}{4}\alpha, \quad FDM = \frac{1}{4}\alpha + \frac{\pi}{4},$$

$$GDM = \frac{1}{4}\alpha - \frac{\pi}{2}, \quad HDM = \frac{1}{4}\alpha - \frac{\pi}{4}.$$

Demnach erhält man durch Vierteln von MB in D und Vierteln des Winkels PDM sofort die vier Mitten E, F, G, H. Ferner entnimmt man den oben abgeleiteten Gleichungen, daß

$$MP_1 \cdot MP_4 = MP \cdot ME, \quad MP_6 \cdot MP_7 = MP \cdot MF,$$

$$MP_2 \cdot MP_8 = MP \cdot MG, \quad MP_3 \cdot MP_5 = MP \cdot MH$$

ist. Demnach ist von jedem der vier Kreise, welche bzw. durch P_1P_4, P_6P_7, P_2P_8, P_3P_5 gehen, eine Zentrale und die Potenz in bezug auf M bekannt, woraus sich verschiedene einfache Wege ergeben. Man kann z. B. auf dem Durchmesser BC die vier entsprechend gelegenen Punkte E', F', G', H' nehmen; dann schneidet der Kreis, der durch C und E' geht und seinen Mittelpunkt über F hat, aus $[PA]$ die Punkte P_1, P_4 aus usw.

Im Gebiete der kubischen Konstruktionen wird die Kreisteilung möglich für Primzahlen von der Form:

$$p = 2^\alpha \cdot 3^\beta + 1,$$

z. B. die 7-Teilung und die 13-Teilung, wie oben (S. 95) ausgeführt. Das Entsprechende gilt für die Lemniskaten- und die Lemniskatoidenteilung, auf die wir nunmehr eingehen wollen.

Lemniskatenteilung.

Daß die Gaußsche Kreisteilung auf die Lemniskate, deren Gleichung in Polarkoordinaten:

$$r^2 = \cos 2\psi$$

ist, übertragen werden kann, beruht auf den gruppentheoretischen Eigenschaften der Teilungsgleichungen, auf die wir hier nicht eingehen können. Hier können nur einige elementare Bemerkungen gemacht werden.

Bezeichnet man mit φ den Lemniskatenbogen vom Anfangspunkte ($r = 0$, $\psi = 0$) aus bis zum Punkte (r, ψ), so findet man leicht:

$$\varphi = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - r^4}},$$

während für den Kreis, dessen entsprechende Gleichung:

$$r = \cos \psi$$

lautet,

$$\varphi = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - r^2}}$$

ist. Die umgekehrte Funktion lautet für den Kreis:

$$r = \sin \varphi,$$

für die Lemniskate:

$$r = \sin \operatorname{lemn} \varphi \quad \text{oder kürzer} \quad \operatorname{sl} \varphi.$$

Diese Funktion hat schon Gauß[1]) betrachtet.

Wir setzen den halben Umfang einer Lemniskatenschleife:

$$\int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1 - r^4}} = \frac{\varpi}{2}.$$

Das Additionstheorem lautet:

$$\operatorname{sl}(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{\operatorname{sl}\varphi_1 \sqrt{1 - \operatorname{sl}^4 \varphi_1} + \operatorname{sl}\varphi_2 \sqrt{1 - \operatorname{sl}^4 \varphi_2}}{1 - \operatorname{sl}^2 \varphi_1 \operatorname{sl}^2 \varphi_2}.$$

Ehe man an die Teilung der ganzen Lemniskate herangeht, hat man wie beim Kreise das Bogenabtragen und Bogenhalbieren zu betrachten. Um den Bogen $\varphi_1 \varphi_2$ von dem Punkte φ' aus abzutragen, hat man den Endpunkt des Bogens φ'', also:

$$r'' = \operatorname{sl} \varphi''$$

zu konstruieren. Das ist mit Zirkel und Lineal möglich, weil r'' nach dem Obigen gleich $\operatorname{sl}(\varphi' + \varphi_2 - \varphi_1)$ sich quadratisch irrational durch r', r_1, r_2 darstellen läßt. — Die gezeichnet vorliegende Lemniskate macht dabei den Gebrauch des Zirkels überflüssig; man kommt mit dem Lineal allein aus.

Für das Bogenhalbieren geht aus der Formel

$$\operatorname{sl} 2\varphi = \frac{2 \operatorname{sl} \varphi}{\sqrt{1 - \operatorname{sl}^4 \varphi}} \quad \text{oder} \quad 1 - 4 \frac{\operatorname{sl}^2 \varphi}{\operatorname{sl}^2 2\varphi} - \operatorname{sl}^4 \varphi = 0$$

hervor, daß es mit Lineal und Zirkel ausführbar ist.

1) Werke III, p. 404.

Für die Dreiteilung eines Bogens hat man die Gleichung neunten Grades:

$$\mathrm{sl}\, 3\varphi = r\,\frac{3 - 6r^4 - r^8}{1 + 6r^4 - 3r^8},$$

die sich aber für die Teilung einer ganzen Lemniskatenschleife wegen

$$3\varphi = \varpi \quad \text{und} \quad \mathrm{sl}\,\varpi = 0$$

auf die Gleichung:

$$3 - 6r^4 - r^8 = 0$$

reduziert, die durch:

$$r^4 = -3 + \sqrt{12}$$

gelöst wird.

Ebenso wie die Dreiteilung ist die Fünfteilung, Siebenzehnteilung usw. der Lemniskate mit Lineal und Zirkel ausführbar.

Aus dem Additionstheorem und der aus der Definitionsgleichung folgenden

$$\mathrm{sl}\, i\varphi = i\, \mathrm{sl}\, \varphi$$

erhält man nämlich

$$\mathrm{sl}\,((2+i)\varphi) = ir \cdot \frac{1 - 2ir^2 - r^4}{1 - (1-2i)r^4}.$$

Setzt man $(2+i)\varphi = \varpi$, so erhält man für $r = \mathrm{sl}\,\frac{\varpi}{2+i}$ die Gleichung:

$$r^4 + 2ir^2 - 1 = 0,$$

woraus $r = \mathrm{sl}\,\frac{\varpi}{2+i}$ quadratisch irrational zu berechnen ist. Aus $\mathrm{sl}\,\frac{\varpi}{2+i}$ und dem konjugierten $\mathrm{sl}\,\frac{\varpi}{2-i}$ liefert das Additionstheorem:

$$\mathrm{sl}\left(\frac{\varpi}{2+i} + \frac{\varpi}{2-i}\right),$$

d. h.

$$\mathrm{sl}\,\frac{4\varpi}{5} = \mathrm{sl}\,\frac{\varpi}{5} = \frac{2}{1+\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt[4]{5} - \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}$$

und

$$\mathrm{sl}\left(\frac{2\varpi}{2+i} + \frac{2\varpi}{2-i}\right),$$

d. h.

$$\mathrm{sl}\,\frac{8\varpi}{5} = \mathrm{sl}\,\frac{3\varpi}{5} = \mathrm{sl}\,\frac{2\varpi}{5} = \frac{2}{1+\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt[4]{5} + \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}.$$

Ebenso erhält man für die Siebenzehnteilung:

$$\mathrm{sl}\,((4+i)\varphi) = \frac{ri((1-4i) - (20-12i)r^4 - (10+28i)r^8 + (12+20i)r^{12} + r^{16})}{1 + (12+20i)r^4 - (10+28i)r^8 - (20-12i)r^{12} + (1-4i)r^{16}},$$

und für $(4+i)\varphi = \varpi$ eine Gleichung vierten Grades für $r^4 = \mathrm{sl}^4\,\frac{\varpi}{4+i}$, die aber in die zwei quadratischen zerfällt:

$$r^8 + \left(6 + 10i \pm 6i\sqrt{1-4i}\right)r^4 + \left((9-2i) \pm (4+2i)\sqrt{1-4i}\right) = 0\,.$$

Dann erhält man wieder aus $\mathrm{sl}\,\frac{\varpi}{4+i}$ und dem konjugierten $\mathrm{sl}\,\frac{\varpi}{4-i}$

$$\mathrm{sl}\left(\frac{\varpi}{4+i} + \frac{\varpi}{4-i}\right) = \mathrm{sl}\,\frac{8\varpi}{17} = \mathrm{sl}\,\frac{9\varpi}{17},$$

$$\mathrm{sl}\left(\frac{2\varpi}{4+i} + \frac{2\varpi}{4-i}\right) = \mathrm{sl}\,\frac{16\varpi}{17} = \mathrm{sl}\,\frac{\varpi}{17} \text{ usw.}$$

Daß die Teilung der Lemniskate in $2^n + 1$ Teile mit Zirkel und Lineal ausführbar ist, wenn diese Zahl prim ist, bemerkte schon Gauß und bewies Abel.[1]) Ein wesentlicher Umstand ist der, daß die Funktion $\mathrm{sl}\,\varphi$ *komplexe Multiplikation* mit ganzen Zahlen der Form $a + bi$ zuläßt, d. h., daß $\mathrm{sl}\,(a + bi)\varphi$ eine rationale Funktion von $\mathrm{sl}\,\varphi$ mit komplex-ganzzahligen Koeffizienten wird.

Lemniskatoidenteilung.

Als Lemniskatoide bezeichnen wir die Kurve mit der Gleichung:

$$r^{\frac{3}{2}} = \cos\frac{3}{2}\psi,$$

die der Lemniskate und dem Kreise analog ist, aber aus drei Blättern besteht, während die Lemniskate deren nur zwei, der Kreis nur eins besitzt.

Zwischen dem vom Anfangspunkt ($r = 0$, $\psi = 0$) nach dem Punkt (r, ψ) sich erstreckenden Bogen φ und dem zugehörigen Radius r besteht die Gleichung:

$$\varphi = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - r^3}},$$

durch die umgekehrt die Funktion

$$r = \mathrm{sm}\,\varphi$$

definiert werden möge.

Auch diese Integrale und deren Umkehrungsfunktionen hat Gauß[2]) betrachtet. Die Theorie der Kreisteilung hat Kiepert[3]) auf sie übertragen, der allerdings die Kurve $r^3 = \cos 3\psi$ mit $\varphi = \int \frac{dr}{\sqrt{1 - r^6}}$ betrachtet, und dies Integral durch $r^2 \,\Big\|\, \frac{1}{r}$ auf $\int \frac{dr}{\sqrt{r^3 - 1}}$ transformiert.

1) Crelles J. f. Math. 2 (1827), p. 146; 3 (1828), p. 160 = Werke I (ed. Sylow u. Lie). p. 314, 352; s. ferner: A. Wichert, Progr. Conitz 1846, L. Kiepert, Crelles J. 75 (1873), p. 255, 348, Weierstraß, Vorlesungen S.-S. 1869.

2) Werke VIII, p. 93.

3) Crelles J. 74 (1872), p. 305.

Er gibt die Teilungsgleichungen für Teilung in $p = 7, 13, 19, 31$ Teile, die im Kubus der Wurzel vom $\frac{p-1}{6}$ ten Grade sind. Die Funktion $\operatorname{sm} \varphi$ läßt komplexe Multiplikation mit Zahlen der Form $a + b\varepsilon$ zu, wo ε eine komplexe dritte Einheitswurzel $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ ist.

Exzentrische Bogenteilung.

Die Teilung der Lemniskate und Lemniskatoide sind spezielle Fälle der Teilung des elliptischen Integrals

$$\int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{a + br + cr^2 + dr^3 + er^4}},$$

nämlich diejenigen beiden speziellen Fälle, die der Harmonie ($g_3 = 0$) und der Äquianharmonie ($g_2 = 0$) der vier Wurzeln des Radikanden entsprechen (s. S. 4).

Wir wollen nunmehr den allgemeinen Fall, aber in einer elementaren Form betrachten, wie sie bei den Teilungen der Lemniskate und Lemniskatoide aus dem Grunde nicht möglich ist, weil der Zusammenhang zwischen einem Bogen einer solchen Kurve und dem zugehörigen Radiusvektor kein elementarer Zusammenhang ist. Man muß, um zu einer elementaren Darstellung zu kommen, beim Kreise stehen bleiben, aber den Begriff des Bogens zweckmäßig verallgemeinern.

Durch den Kreis

$$x^2 + y^2 = 1$$

und die ihn nicht schneidende Gerade:

$$x = p \qquad (|p| > 1)$$

wird ein Kreisbüschel:

$$x^2 + y^2 - 1 = 2\lambda(x - p)$$

mit zwei imaginären Basispunkten bestimmt. Diese Basispunkte haben die Koordinaten:

$$x = p, \quad y = \pm i\sqrt{p^2 - 1}.$$

Die beiden Grenzpunkte M, M' des Büschels, d. h. die Mittelpunkte der beiden Kreise des Büschels mit verschwindendem Radius mögen die Abszissen e und e' haben.

Dann ist die Gleichung eines derselben:

$$(x - e)^2 + y^2 = 0,$$

der dem Werte $\lambda = e$ des Parameters λ entspricht; folglich muß:

$$1 + e^2 = 2ep$$

sein. Die kleinere der beiden Wurzeln, also:

$$p - \sqrt{p^2 - 1}$$

werde mit e bezeichnet, und der zugehörige Punkt M der „exzentrische Mittelpunkt" des Kreises:

$$x^2 + y^2 = 1$$

genannt.

Eine durch M gehende Gerade heißt exzentrische Zentrale; die auf ihr liegende Sehne des Kreises exzentrischer Durchmesser, die beiden Teile, in die ein solcher durch M zerfällt, exzentrische Radien.

Zwei Bogen des Kreises heißen exzentrisch gleich, wenn ihre Sehnen denselben Kreis des Büschels berühren.[1]) Diese Definition ist zulässig; denn es gilt der Satz: „Sind zwei Bogen einem dritten exzentrisch gleich, so sind sie einander exzentrisch gleich." — Auf Grund dieser Definition ist zunächst die Aufgabe des Bogenabtragens zu lösen. Soll der Bogen $\widehat{AB}$ dem Bogen $\widehat{A'B'}$ gleich sein und sind A, B und A' gegeben, so konstruiere man denjenigen Büschelkreis, der die Sehne AB berührt, und lege an ihn von A' aus die beiden Tangenten. Diese liefern die Endpunkte B' der zwei Bogen $A'B'$, die dem gegebenen exzentrisch gleich sind.

Den die Sehne AB berührenden Büschelkreis findet man vermittels des Orthogonalkreises des Büschels, welcher MM' zum Durchmesser hat. Durch Inversion (s. S. 57) an diesem geht die Tangente AB in einen den gesuchten Kreis tangierenden Kreis über, so daß die Aufgabe darauf zurückkommt, einen Kreis zu konstruieren, der zwei gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt. Übrigens kommt hier nur derjenige Teil des Büschels in Betracht, der ganz innerhalb des Hauptkreises liegt.

Vermittels des Bogenabtragens ist auch das Bogenvergleichen, d. h. die Entscheidung darüber, ob zwei gegebene Bogen gleich, bzw. welcher der größere ist, gegeben.

Durch das Bogenabtragen ist ferner auch das Addieren von Bogen möglich, und dabei gilt, wie es sein muß, der Satz: Die Summen gleicher Bogen ergeben gleiche Bogen, d. h. ist

$$\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$$

und

$$\widehat{BC} = \widehat{B'C'},$$

dann ist auch:

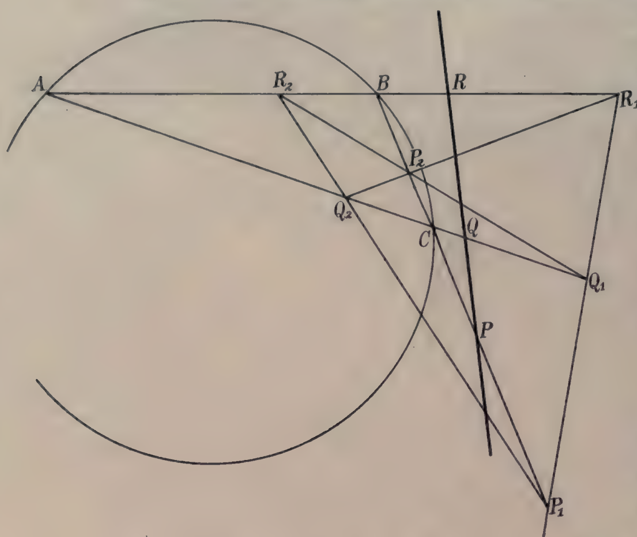
$$\widehat{AC} = \widehat{A'C'}.$$

1) Diese Bogengleichheit, die sich natürlich sinngemäß auf Kegelschnitte übertragen läßt, ist völlig verschieden von der auf S. 49 behandelten. Die Beziehung zwischen den Endpunkten gleicher Bögen ist dort eine bilineare Projektivität (s. S. 8), hier eine bi-quadratische Involution (s. S. 74).

Denn es gilt in der Tat der Satz: „Sind AB und $A'B'$ Tangenten eines Büschelkreisels, BC und $B'C'$ Tangenten eines zweiten Büschelkreises, so sind auch AC und $A'C'$ Tangenten eines Büschelkreises. Oder anders ausgesprochen:

Umhüllen zwei Seiten eines Dreiecks ABC, dessen Ecken den Hauptkreis beschreiben, Büschelkreise, dann umhüllt auch die dritte einen Büschelkreis.

Um diesen Satz, der für die vorliegenden Betrachtungen die Grundlage ist, mit ganz elementaren Mitteln zu beweisen, betrachten wir die Figur, in der $[AB]$, $[BC]$ Tangenten von Büschelkreisen, R_2, P_2 deren Berührpunkte sind. Ist $[PR]$ die Linie gleicher Potenzen des Kreisbüschels, so ist demnach



$$RR_2^{\,2} = RA \cdot RB,$$
$$PP_2^{\,2} = PB \cdot PC.$$

Nach einer kleinen Verschiebung der Punkte A, B, C in A', B', C' auf dem Kreise, so daß $[A'B']$ und $[B'C']$ Tangenten derselben Büschelkreise bleiben, verhält sich, wegen ähnlicher Dreiecke:

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{AR_2}{BR_2},$$
$$\frac{BB'}{CC'} = \frac{BP_2}{CP_2},$$

und auch noch

$$\frac{CC'}{AA'} = \frac{CQ_2}{AQ_2},$$

wenn Q_2 der Schnittpunkt der zwei unendlich benachbarten Geraden $[AC]$, $[A'C']$ ist. Es ist zu zeigen, daß es einen Kreis im Büschel gibt, der $[AC]$ in Q_2 berührt, d. h. es ist zu zeigen, daß

$$QQ_2^{\,2} = QA \cdot QC$$

ist. Aus den obigen drei Proportionen folgt

$$\frac{AR_2}{BR_2} \cdot \frac{BP_2}{CP_2} \cdot \frac{CQ_2}{AQ_2} = 1,$$

d. h. mit Rücksicht auf die Umkehrung des Cevaschen Satzes (s. S. 13):

$[AP_2]$, $[BQ_2]$, $[CR_2]$ gehen durch einen Punkt. Sind $P_1 Q_1 R_1$ die vierten harmonischen zu $P_2 Q_2 R_2$ in bezug auf BC bzw. CA bzw. AB, so ist auch

$$\frac{AR_1}{BR_1} \cdot \frac{BP_1}{CP_1} \cdot \frac{CQ_1}{AQ_1} = 1,$$

also wegen der Umkehrung des Menelaischen Satzes (s. S. 13): P_1, Q_1, R_1 auf einer Geraden. Ebenso liegen: $P_1 Q_2 R_2$, $P_2 Q_1 R_2$, $P_2 Q_2 R_1$ auf je einer Geraden. Diese vier Geraden bilden ein vollständiges Viereck, also liegen nach dem Satz von Gauß (s. S. 31) die Mittelpunkte ihrer drei Diagonalen $P_1 P_2$, $Q_1 Q_2$, $R_1 R_2$ auf einer Geraden. Die Mittelpunkte von $R_1 R_2$ und $P_1 P_2$ sind aber R und P, also ist $[PR]$ diese Gerade, also $Q = ([PR][AC])$ der Mittelpunkt von $Q_1 Q_2$, also $QQ_2^2 = QA \cdot QC$, was zu beweisen war.

Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes erhält man den allgemeineren: Beschreiben die Ecken $ABCDE\ldots$ eines n-Ecks den Hauptkreis, während $n-1$ seiner Seiten $[AB]$, $[BC]$, ... Kreise des Büschels berühren, dann berührt auch die letzte immer einen Kreis des Büschels. Denn aus dem für $n = 3$ bewiesenen Satze folgt, daß die Voraussetzungen des Satzes auch für das $n-1$ Eck $ACDE\ldots$, das $n-2$ Eck $ADE\ldots$ usw. erfüllt sind.

Berühren alle n Seiten des n-Ecks $ABCD\ldots$ einen und denselben Büschelkreis und die ersten $n-1$ Seiten des n-Ecks $A'B'C'D'\ldots$ denselben, so muß auch die n^{te} Seite dieses n-Ecks denselben Kreis berühren. Demnach erhält man den Satz: Gibt es *ein* n-Eck, das einem Kreise ein-, einem andern umschrieben ist, so gibt es deren unendlich viele. Der Satz ist durch Projektion sofort von Kreisen auf Kegelschnitte zu übertragen; das ist der berühmte Satz von Poncelet.[1])

Auf dem Vervielfachen und Vergleichen beruht das Messen[2]), d. h. die Beantwortung der Frage, wieviel mal so groß ein Bogen ist als ein anderer. Man hat dazu den bekannten Euklidischen Algorithmus anzuwenden. Dabei wird natürlich der Archimedische Satz der Meßbarkeit vorausgesetzt, der in diesem Fall lautet: „Durch Vervielfachung eines Bogens kann man stets zu einem Bogen kommen, der größer ist als ein gegebener." Die Richtigkeit des Satzes für die exzentrische Bogengleichheit ergibt sich wie folgt:

---

1) Traité, letzter Teil.

2) Es ist zu beachten, daß das Messen *nicht* das Teilen voraussetzt, obwohl das Messen von Strecken immer hierauf gegründet wird. Das Teilen ist eine schwierigere Operation, in vielen Fällen unmöglich, wo doch das Messen ausführbar ist; z. B. schon beim Messen der Bögen eines Kreises, einer Lemniskate usw. Das Messen von Winkeln ohne Teilen vollzog schon Lagny, Mém. Paris 1724.

Ist $\widehat{AA'}$ ein gegebener Bogen und

$$\widehat{AA'} = \widehat{A'A''} = \widehat{A''A'''} = \cdots,$$

so muß der Bogen $\widehat{AA^{(n)}}$ jeden beliebig gegebenen Bogen schließlich überschreiten; denn jeder dieser Bogen: $\widehat{AA'}$, $\widehat{A'A''}$, ... ist in der gewöhnlichen Bedeutung der Bogengleichheit größer als ein gewisser kleinster Bogen, bestimmt durch *die* Tangente des Büschelkreises, auf der durch den Hauptkreis die kleinste Sehne abgeschnitten wird, und schon durch Vervielfachung des kleinsten Bogens kann ein Bogen erzeugt werden, der jeden gegebenen übertrifft.

Ferner kann man auch einen beliebigen Bogen $\widehat{AB}$ halbieren. Zu dem Zweck konstruiere man den die Sehne $[AB]$ berührenden Büschelkreis und lege an ihn diejenige Tangente $[A'B']$, welche auf der Zentrale des Büschels senkrecht steht; der zugehörige Bogen $\widehat{A'B'}$, der dem Bogen $\widehat{AB}$ exzentrisch gleich ist, wird durch die Zentrale halbiert. Die dadurch gegebene Hälfte kann man noch von A nach B hin abtragen.

Es kommt nun weiterhin darauf an, zu einem gegebenen Bogen ein exzentrisches Bogenmaß anzugeben, der Art, daß gleiche Bogen gleiche Maße erhalten. Der gegebene Bogen, vom Scheitel

$$S(x = 1,\ y = 0)$$

an gerechnet, sei $\widehat{SA} = a$, dann soll der Peripheriewinkel α über der Sehne SA in dem entgegengesetzten Kreisabschnitt als das *exzentrische Bogenmaß* von a angesehen werden:

$$\alpha = \operatorname{arc\,exc} a.$$

Nunmehr muß das Additionstheorem für diese Funktion abgeleitet werden.

Sei jetzt r der Radius des zur Sehne SA gehörigen Büschelkreises, O_1 dessen Mittelpunkt, R der Berührungspunkt, λ der Parameter des Büschelkreises, so bestehen folgende Gleichungen:

$$x^2 + y^2 - 1 = 2\lambda(x - p)$$

und weil

$$O O_1 = \lambda$$

ist:

$$(x - \lambda)^2 + y^2 = r^2,$$

woraus durch Subtraktion folgt:

$$r^2 = \lambda^2 - 2\lambda p + 1.$$

Ferner ist $SO_1 = 1 + \lambda$ und $O_1R = r$, folglich:

$$SR = \sqrt{1 + 2\lambda + \lambda^2 - r^2} = \sqrt{2\lambda(1+p)},$$

demnach:

$$\sin\alpha = \frac{SR}{SO_1} = \frac{\sqrt{2\lambda(1+p)}}{1+\lambda},$$

$$\cos\alpha = \frac{O_1R}{O_1S} = \frac{r}{1+\lambda}.$$

Wir setzen noch: $k^2 = \frac{2}{p+1}$, dann wird:

$$k^2 \sin^2\alpha = \frac{4\lambda}{(1+\lambda)^2},$$

also:

$$\sqrt{1 - k^2\sin^2\alpha} = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} = \frac{S'O_1}{SO_1}.$$

Jetzt mögen zwei Bogen:

$$\widehat{SA} = a, \quad \widehat{SB} = b \quad \text{und ihre Summe} \quad \widehat{AB} = c$$

betrachtet werden, so daß also:

$$c = a + b$$

ist; und es soll die zwischen ihren exzentrischen Bogenmaßen α, β, γ bestehende Beziehung ermittelt werden.

Die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes A sind:

$$x_1 = -\cos 2\alpha,$$
$$y_1 = \sin 2\alpha;$$

die des Punktes B:

$$x_2 = -\cos 2\beta,$$
$$y_2 = -\sin 2\beta.$$

Nunmehr sei O' der Mittelpunkt, r der Radius, λ der Parameter, R der Berührungspunkt des zur Sehne $AB = s = 2\sin(\alpha+\beta)$ gehörigen Büschelkreises, so ist:

$$AR^2 = AO'^2 - r^2 = (x_1 - \lambda)^2 + y_1^2 - (\lambda^2 - 2\lambda p + 1)$$
$$= 2\lambda(p - x_1).$$

Ebenso:

$$QR^2 = 2\lambda(p - x_2);$$

folglich:

$$PQ = s = 2\sin(\alpha+\beta)$$
$$= \sqrt{2\lambda(p+1)}\left(\sqrt{1 - \frac{x_1+1}{p+1}} + \sqrt{1 - \frac{x_2+1}{p+1}}\right).$$

Also:

$$\sqrt{\lambda} = \frac{k \sin(\alpha+\beta)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}+\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}$$
$$= \frac{\sin(\alpha+\beta)\left\{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}-\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}\right\}}{k(-\sin^2\alpha+\sin^2\beta)};$$

daraus ergibt sich noch:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{k \sin(\beta-\alpha)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}-\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}$$
$$= \frac{\sin(\beta-\alpha)\left\{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}+\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}\right\}}{k(-\sin^2\alpha+\sin^2\beta)}.$$

Nunmehr ergibt sich:

$$\sqrt{\lambda}+\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2\sin\beta\cos\alpha\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}-2\sin\alpha\cos\beta\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}{k(-\sin^2\alpha+\sin^2\beta)},$$

folglich:

$$\frac{\lambda+1}{\sqrt{2\lambda(p+1)}} = \frac{\sin\alpha\, R(\beta)-\sin\beta\, R(\alpha)}{\sin^2\alpha-\sin^2\beta},$$

wenn zur Abkürzung:

$$R(\alpha) = \sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}$$

gesetzt wird; folglich:

$$\sin\gamma = \frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin\alpha\, R(\beta)-\sin\beta\, R(\alpha)}$$
$$= \frac{(\sin^2\alpha-\sin^2\beta)(\sin\alpha\, R(\beta)+\sin\beta\, R(\alpha))}{\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)(1-k^2\sin^2\beta)-\sin^2\beta(1-\sin^2\alpha)(1-k^2\sin^2\alpha)}$$
$$= \frac{(\sin^2\alpha-\sin^2\beta)(\sin\alpha\, R(\beta)+\sin\beta\, R(\alpha))}{(\sin^2\alpha-\sin^2\beta)(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\beta)}$$
$$= \frac{\sin\alpha\, R(\beta)+\sin\beta\, R(\alpha)}{1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$$

Dies ist *eine* Form des gesuchten Additionstheorems.

Von der Relation:

$$\cos(\beta-\alpha)+\lambda\cos(\alpha+\beta) = r$$

ausgehend findet man

$$\cos\alpha\cos\beta+\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\sin\alpha\sin\beta = \frac{r}{1+\lambda},$$

also:

$$\cos\alpha\cos\beta+\sqrt{1-k^2\sin^2\gamma}\,\sin\alpha\sin\beta = \cos\gamma,$$

das ist diejenige Form des Additionstheorems, auf die Lagrange die Verbindung zwischen der sphärischen Trigonometrie und der Theorie der elliptischen Funktionen gegründet hat. Sind nämlich α, β, γ die Seiten, a, b, c die Winkel eines sphärischen Dreiecks und

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma} = k$$

sein Modul, so ist bekanntlich:

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c,$$

wo

$$\cos c = \sqrt{1-\sin^2 c} = \sqrt{1-k^2\sin^2\gamma}$$

gesetzt werden kann.

Der Vollständigkeit halber leiten wir auch die transzendente Bedeutung der Funktion arc exc her, obwohl die Theorie der exzentrischen Kreisteilung ganz unabhängig davon ist.

Sind $AA' = ds_1$ und $BB' = ds_2$ zwei exzentrisch gleiche Bogenelemente, also AB und $A'B'$ zwei unendlich benachbarte Tangenten desselben Büschelkreises mit dem Parameter λ und dem Berührungspunkte R, so ist wie oben:

$$ds_1 : ds_2 = AR : BR$$

und die Quadrate von AR und BR sind die Potenzen der Punkte $A(x_1, y_1)$ und $B(x_2, y_2)$ in bezug auf den Büschelkreis:

$$x^2 + y^2 - 1 = 2\lambda(x-p),$$

folglich:

$$AR : BR = \sqrt{2\lambda(p-x_1)} : \sqrt{2\lambda(p-x_2)} = \sqrt{1-\frac{x_1+1}{p+1}} : \sqrt{1-\frac{x_2+1}{p+1}},$$

also

$$\frac{ds_1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 s_1}} = \frac{ds_2}{\sqrt{1-k^2\sin^2 s_2}},$$

wenn $s_1 = \text{arc exc}\,(SA)$ und $s_2 = \text{arc exc}\,(SB)$ gesetzt wird. Sind also AA'' und BB'' zwei endliche exzentrischgleiche Bogen, so ist:

$$\int_A^{A''}\frac{ds_1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 s_1}} = \int_B^{B''}\frac{ds_2}{\sqrt{1-k^2\sin^2 s_2}}.$$

Der Wert dieses Integrals ist also für alle exzentrisch gleichen Bogen derselbe. Ordnet man dem Bogen $\widehat{AB}$ den Wert dieses Integrals als Bogenmaß a zu, so ist s als Funktion von a die in der Theorie der elliptischen Funktionen mit am a bezeichnete Funktion. Aber es ist bemerkenswert, daß die obige Herleitung des Additionstheorems von diesem transzendenten Maß des Bogens unabhängig ist.

Wir bezeichnen noch die Funktion:

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}$$

als „Differente" dn von a; dann lautet z. B. die Formel für die exzentrische Verdoppelung eines Bogens:

$$\sin\text{am}\,2a = \frac{2\sin\text{am}\,a\cdot\cos\text{am}\,a\cdot\text{dn}\,a}{1-k^2\sin\text{am}^4 a},$$

und allgemein ist sin am na eine rationale Funktion von sin am a und cos am a · dn a. Bezeichnet man den ganzen Umfang exzentrisch gemessen mit 2ϖ, so wird:

$$\sin \operatorname{am} 2\varpi = \frac{2 \cdot \sin \operatorname{am} \varpi \cdot \cos \operatorname{am} \varpi \cdot \operatorname{dn} \varpi}{1 - k^2 \sin \operatorname{am}^4 \varpi};$$

aber es ist:

$$\sin \operatorname{am} \varpi = \sin \frac{\pi}{2} = 1,$$

folglich:

$$\cos \operatorname{am} \varpi = 0,$$
$$\sin \operatorname{am} 2\varpi = 0.$$

Für die exzentrische Teilung des ganzen Umfangs 2ϖ in n gleiche Teile erhält man also eine gleich 0 gesetzte rationale Funktion von

$$\sin \operatorname{am} \frac{2\varpi}{n} \quad \text{und} \quad \cos \operatorname{am} \frac{2\varpi}{n} \cdot dn \frac{2\varpi}{n}.$$

Setzt man in dieser Gleichung:

$$\sin \operatorname{am} \frac{2\varpi}{n} = \frac{\sqrt{2\lambda(p+1)}}{\lambda + 1},$$
$$\cos \operatorname{am} \frac{2\varpi}{n} = \frac{r}{\lambda + 1},$$
$$\operatorname{dn} \frac{2\varpi}{n} = \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda},$$

so erhält man eine Gleichung zwischen λ, r und p, aus der noch z. B. p vermittels der Gleichung:

$$r^2 = \lambda^2 - 2\lambda p + 1$$

eliminiert werden kann. Damit bekommt man also die Gleichung zwischen den Radien 1 und r und dem Zentralabstand λ zweier Kreise, deren einem sich ein n-Eck einbeschreiben läßt, das dem anderen umbeschrieben ist. Umgekehrt kann man von dieser Beziehung ausgehend, Teilungsgleichungen ableiten.

Für den Fall $n = 3$ besteht bekanntlich die Eulersche Relation[1]):

$$\lambda^2 = 1 - 2r,$$

1) Siehe hierüber E. Kötter l. c., p. 151. Analoge Formeln für symmetrische 4-, 5-, 6-, 7-, 8-Ecke, die also auch allgemein gelten, hat Fuß (Nova acta Petrop. 1792, Bd. 10 (1797), p. 103, Bd. 13 (1827), p. 166) gegeben. L'Huilier (Gerg. Ann. 1 (1810, 1811), p. 149) zog den Schluß, daß zwei Kreise unendlich viele ein- bzw. umbeschriebene Dreiecke zulassen, wenn zwischen ihren Radien und ihrem Zentralabstand die Eulersche Relation besteht. Steiner (Crelles J. 2 (1827), p. 96 = Werke I, p. 127) stellte die Aufgabe, die der Eulerschen analoge Formel für n-Ecke aufzustellen; und gab (Crelles J. 2 (1827), p. 287 = Werke I, p. 159) die Lösungen für $n = 4, 5, 6, 8$. Vgl. ferner: M. Simon, De relationibus inter constantes duarum linearum secundi ordinis, ut sit polygonum alteri inscriptum,

aus der sich wegen $\lambda^2 - 2\lambda p + 1 = r^2$ für λ die Gleichung vierten Grades:

$$\lambda^4 - 6\lambda^2 + 8p\lambda - 3 = 0$$

ergibt. Die kubische Resolvente $4u^3 - g_2 u + g_3 = 0$ dieser Gleichung wird wegen $g_2 = 0$, $g_3 = 4 - 4p^2$:

$$u^3 = p^2 - 1.$$

Daraus folgt, daß die exzentrische Dreiteilung als kubische Konstruktion stets, als quadratische nur dann ausführbar ist, wenn $p^2 - 1$ oder also die von $(x = p,\ y = 0)$ an den Kreis gelegte Tangente $t = \sqrt{p^2 - 1}$ der Kubus einer konstruierbaren Größe ist; z. B. wird im lemniskatischen Fall:

$$k^2 = -1, \quad p = \frac{2}{k^2} - 1 = -3, \quad u = 2,$$

d. h. die Dreiteilung der Lemniskate ist mit Zirkel und Lineal möglich, wie wir schon oben fanden.

Für den allgemeinen Fall bemerken wir nur noch, daß genau wie bei der gewöhnlichen Kreisteilung, die dem Fall

$$p = \infty \quad \text{oder} \quad k = 0$$

entspricht, aus der n-Teilung die $2n$-Teilung folgt und aus der m- und n-Teilung, wenn m und n teilerfremd sind, die mn-Teilung. Diese Tatsachen entsprechen bestimmten algebraischen Eigenschaften der Teilungsgleichungen, deren Richtigkeit aber hier auf elementargeometrischem Wege zu erkennen ist.[1])

Kapitel VI.

Konstruktionen im Raume.

Man muß unterscheiden zwischen Konstruktionen, die wirklich im Raume ausgeführt, d. h. ausgeführt gedacht werden, und solchen, die durch irgendeine darstellend geometrische Methode auf Konstruk-

---

circumscriptum alteri. Diss. Berlin 1867. Halphen, Bull. de la soc. philomatique de Paris (7) III (Paris 1880), p. 17. Cayley, Quarterly Journal XI (1871), p. 83, Philos. Mag Nov. (1853) VII (1854), p. 339.

1) Den oben elementar hergeleiteten Zusammenhang zwischen dem Poncelетschen Schließungssatz und der Multiplikation der elliptischen Funktionen erkannte zuerst C. G. J Jacobi (Crelles J. 3 (1828), p. 376 = Werke I (1881), p. 277). Später wurde die Schließungsbedingung abhängig gemacht von der Kettenbruchentwicklung des Radikals des elliptischen Integrals. Über die Literatur s. Gino Loria, I poligoni di Poncelet, Turin 1889 und Bibl. math. (2) 3 (1889), p. 67.

tionen in der Ebene zurückgeführt werden. Jede hierzu geeignete Methode muß zwischen den Punkten des Raumes und geeigneten Elementen (z B. Punkt*paaren*) der Ebene, eine eindeutige Beziehung herstellen. Nachdem eine solche „Abbildung“ gewonnen ist (z. B. durch Zentralprojektion von zwei Zentren O_1, O_2 aus auf dieselbe Ebene) ist es gleichgültig, ob man eine räumliche Konstruktion als räumliche oder ihre Übertragung in die Ebene beschreibt.

Bei den Konstruktionen im Raume ist jedenfalls als konstruktives Postulat zu den ebenen hinzuzunehmen, daß man die Schnittpunkte von Geraden und Ebenen finden könne. Es ist nach einer Behauptung *G. Haucks*[1]) nicht möglich, den Schnittpunkt einer Ebene $\{ABC\}$ und einer Geraden $[DE]$ durch bloßes Ziehen von Geraden zu erhalten. Man reduziert die Anwendung dieses neuen Postulates auf ein Minimum, nämlich auf das Aufsuchen von Schnittpunkten nur von Geraden der Punkte O_1 und O_2 mit der Projektionsebene, in dem man diese Art darstellende Geometrie anwendet. Und bei den metrischen linearen Konstruktionen kann man das räumliche Postulat ganz vermeiden. Um den Schnittpunkt von $\{ABC\}$ mit $[DE]$ als Schnitt bloß von Geraden zu finden, fälle man von D und E die Lote auf $\{ABC\}$; die Verbindungsgerade ihrer Fußpunkte trifft $[DE]$ in dem gesuchten Punkte; und die Fußpunkte selber ergeben sich so: man fälle in $\{DAB\}$ das Lot $\mathfrak{G}$ von D auf $[AB]$, errichte in $\{ABC\}$ im Fußpunkt von $\mathfrak{G}$ auf $[AB]$ das Lot $\mathfrak{H}$, fälle in $\{\mathfrak{G}\mathfrak{H}\}$ von D das Lot auf $\mathfrak{H}$, dies trifft $\mathfrak{H}$ in dem gesuchten Punkte.

Räumliche Konstruktionen benutzten schon die Alten, z. B. Archytas zur Würfelverdoppelung (S. 77[12]), S. 101), Pappus[2]) zur Lösung der Aufgabe: Gegeben ist ein Bruchstück eines Kreiszylinders; seinen Durchmesser zu konstruieren. Die Aufgabe ist auf Kugel, Kegel, Flächen zweiter Ordnung auszudehnen.

Das Apollonische Taktionsproblem (S. 61) ist mehrfach auf den Raum übertragen worden[3]), ebenso die Aufgaben von Malfatti (S. 61)[4]) und Castillon (S. 52).[5])

Aufgaben betreffend die Bestimmung von Flächen zweiter Ordnung durch neun gegebene Punkte oder polare Elemente und von Raumkurven dritter Ordnung durch gegebene Punkte und Sekanten

---

1) W. Dyck, Katalog mathem. usw. Modelle (München 1892), p. 43.

2) l. c., p. 1073.

3) S. z. B. Fermat, De contactibus sphäricis. S. ferner E. Kötter l. c., p. 109. Fiedler, Zyklographie oder Konstruktion der Aufgaben über Kreise und Kugeln (Leipzig 1882).

4) S. Steiner, Crelles J. 1 (1826), p. 178 = Werke I, p. 35.

5) S. E. Kötter l. c., p. 149.

behandelt z. B. H. Schröter[1]); besondere Probleme dieser Art auch R. Heger[2]), F. Unferdinger[3]) u. a.

Von projektiven quadratischen Aufgaben erwähnen wir noch die Konstruktion der zwei Transversalen zu vier gegebenen Geraden[4]), von metrischen linearen die Konstruktion des kürzesten Abstandes von zwei gegebenen Geraden. Projektiv kubisch ist die Konstruktion der Doppelpunkte einer räumlichen Projektivität, metrisch kubisch die Konstruktion der Achsen einer Fläche zweiter Ordnung. Weitere Aufgaben beziehen sich auf die Schnittpunkte von drei Flächen zweiter Ordnung oder von einer solchen mit einer kubischen Raumkurve. Es entsteht die Frage, welche Gleichungen achten bzw. sechsten Grades auf diese Weise lösbar sind.

Wenig beachtet sind die Konstruktionen *auf* der Kugel geblieben.[5]) Da auf der Kugel die Anwendung des Lineals wegfällt, hat man hier das eigentliche Gebiet der Mascheronischen Konstruktionen vor sich. Man kann diese Konstruktionen danach unterscheiden, ob sie die Übertragung auf die Kugel zulassen oder nicht. Die ersteren sind diejenigen, welche überhaupt Inversionen zulassen. Diese „inversiblen" unterscheiden sich von den anderen gerade so wie die projektiven von den affinen.

Es kommt bei dieser Unterscheidung darauf an, ob in der Aufgabe eine Beziehung zu dem unendlich fernen Punkt vorkommt. In der Mascheronischen Ebene gibt es nämlich nur *einen* unendlich fernen *Punkt*, weil durch Inversion jedem Punkte ein Punkt entspricht, also auch dem Mittelpunkt des Inversionskreises. Das ist auch in Übereinstimmung mit der Auffassung der Kreisverwandtschaft als einer komplexen Projektivität auf einer Geraden (S. 57 [2])): auch im komplexen Zahlengebiet gibt es nur *eine* unendliche Zahl.

Insbesondere wird die Einheitskugel

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

durch Inversion abgebildet auf ihre Äquatorebene $\zeta = 0$ durch Gerade, die durch den Pol ($\xi = \eta = 0$, $\zeta = 1$) gehen.[6]) Entspricht dem Punkte (x, y) der Ebene dann der Punkt (ξ, η, ζ) der Kugel, so gibt die Figur sofort:

---

1) Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumkurven dritter Ordnung (Leipzig 1880), p. 167, 239, 252, 462. Über die Literatur s. Bögehold, Hist.-krit. Darst. d. Konstr. d. Fl. 2ter Ord. aus 9 Punkten, Jena 1898.

2) Progr. Dresden 1881.

3) Archiv d. Math. u. Phys. 48 (1868), p. 118.

4) S. Kötter l. c., p. 76.

5) Über die Malfattische Aufgabe auf der Kugel und auf Flächen zweiter Ordnung s. Steiner l. c.

6) Stereographische Projektion des Ptolemäus, nach Synesius von Cyrene schon Hipparch bekannt; s. E. Kötter l. c., p. 93.

$$\xi : \eta : 1 - \zeta = x : y : 1,$$

also:

$$z = x + iy = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta} = \frac{1 + \zeta}{\xi - i\eta}.$$

Jedem Punkte (ξ, η, ζ) der Kugel wird die komplexe Zahl $z = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta}$ zugeordnet. Einer Kreisverwandtschaft in der Ebene entspricht eine solche auf der Kugel. Insbesondere sind Drehungen der Kugel Kreisverwandtschaften. Geht bei einer beliebigen Drehung der Kugel in sich das Dreieck ABC in $A'B'C'$ über, so folgt aus symmetrischen Dreiecken, daß die sphärischen Mittellote der Bögen AA', BB', CC' sich in zwei diametralen Punkten NS schneiden, so daß die Drehung der Kugel eine Drehung um die Achse $[NS]$ ist. Ist $\widehat{PQ}$ ein Bogen auf dem zu $[NS]$ gehörigen Äquator, und $2 \cdot POQ$ der Drehungswinkel, so kommt der Punkt A nach A' offenbar auch durch Umwendung (d. h. Drehung um 180^0) erst um $[OP]$, dann um $[OQ]$: Jede Drehung ist die Folge zweier Umwendungen.

Eine Umwendung um die Achse mit den Richtungskosinus p, q, r wird durch

$$z \left| \frac{rz + (p + iq)}{(p - iq)z - r} \right.$$

dargestellt. Denn diese Transformation ist erstens eine Inversion, da sie mit der umgekehrten identisch, zweitens läßt sie die Punkte (p, q, r) und $(-p, -q, -r)$ in Ruhe; und durch ihre Doppelpunkte ist eine gerade Inversion eindeutig bestimmt, wie die Involution auf der Geraden. Setzt man die beiden Umwendungen

$$z \left| \frac{r_1 z + (p_1 + iq_1)}{(p_1 - iq_1)z - r_1} \right. \quad \text{und} \quad z \left| \frac{r_2 z + (p_2 + iq_2)}{(p_2 - iq_2)z - r_2} \right.$$

zusammen, so erhält man:

$$z \left| \frac{((p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2) + i(p_1 q_2 - p_2 q_1))z + i(q_1 r_2 - r_1 q_2) + (r_1 p_2 - r_2 p_1)}{(i(q_1 r_2 - r_1 q_2) - (r_1 p_2 - r_2 p_1))z + ((p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2) - i(p_1 q_2 - p_2 q_1))} \right.$$

oder

$$z \left| \frac{(\cos\varphi + ir\sin\varphi)z + i\sin\varphi\,(p + iq)}{i\sin\varphi\,(p - iq)z + (\cos\varphi - ir\sin\varphi)} \right. ,$$

wenn man

$$p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2 = \cos\varphi,$$
$$(q_1 r_2 - r_1 q_2) = p\sin\varphi,$$
$$(r_1 p_2 - r_2 p_1) = q\sin\varphi$$
$$(p_1 q_2 - p_2 q_1) = r\sin\varphi,$$

setzt, so daß also φ der Winkel der Umwendachsen, der halbe Drehungswinkel der Drehung und p, q, r die Richtungskosinus ihrer Drehachse sind.[1])

---

1) Ähnliche elementare Herleitungen gaben A. Schönflies, Deutsch. Math. Ver. 18 (1909), p. 456 und J. Wellstein, ib. 19 (1910), p. 169.

Natürlich ist auch umgekehrt jede solche Kreisverwandtschaft

$$z \Big\| \frac{\lambda z + \mu}{-\mu' z + \lambda'},$$

wo λ und λ', μ und μ' konjugiert komplex sind, eine Drehung. Denn zunächst kann man annehmen, daß $\lambda\lambda' + \mu\mu' = 1$ ist; sonst kann man mit der reellen Größe $+\sqrt{\lambda\lambda' + \mu\mu'}$ kürzen. Alsdann kann man setzen:

$$\lambda = \cos\varphi + ir\sin\varphi, \quad \mu = i(p + iq)\sin\varphi,$$

so daß also:

$$1 = \lambda\lambda' + \mu\mu' = \cos^2\varphi + (p^2 + q^2 + r^2)\sin^2\varphi,$$

also $p^2 + q^2 + r^2 = 1$ wird. Dann sind p, q, r drei Richtungskosinus, die der Drehachse, und φ der halbe Drehwinkel.[1])

Aufgaben: 1. Die Aufgaben von Apollonius, Malfatti, Castillon. 2. Bogen- und Kreisteilung 3. Konstruktion der Ecken der regulären (Platonischen) und der halbregulären (Archimedischen) Körper auf der Kugel. 4. Aufgaben betreffend sphärische Kegelschnitte.

---

1) Vgl. hierzu: Vahlen, Über Bewegungen und komplexe Zahlen (Math. Ann. 55 (1901), p. 585), wo die entsprechenden Resultate und zwar nicht nur für Drehungen, sondern für beliebige Bewegungen im n-dimensionalen, überdies euklidischen oder nichteuklidischen Raum abgeleitet werden.

Fünfter Teil.

Numerische Approximationen.

Statt bei gegebenen Konstruktionsaufgaben, die mit gegebenen Hilfsmitteln nicht lösbar sind, neue Konstruktionsmittel einzuführen, kann man auch darauf ausgehen, die Aufgaben mit den bisherigen Konstruktionsmitteln, aber nur *näherungsweise* aufzulösen.

Die Aufgaben, die am meisten Veranlassung zu Approximationen gegeben haben, sind die Aufgaben der Würfelvervielfachung und der Teilung und Rektifikation von Kreisbögen oder des ganzen Kreises. In Beziehung auf das Hauptproblem der Rektifikation des ganzen Kreises kann man drei Perioden unterscheiden.

In der ersten, von Archimedes bis zur Erfindung der Infinitesimalrechnung, handelt es sich im wesentlichen nur um die näherungsweise Darstellung des Kreisumfanges als rationales Vielfaches des Durchmessers. Diese Art Approximationen wollen wir „*numerische*“ nennen. (Fünfter Teil.)

In der zweiten Periode wurde der *analytische* Charakter der Zahl π und der damit zusammenhängenden goniometrischen, zyklometrischen, logarithmischen und Exponentialfunktionen erkannt, zunächst nur in formaler Weise, indem man gesetzmäßige Darstellungen dieser Größen fand. (Sechster Teil.) Dann aber, im 19. Jahrhundert, auf Grund der gefundenen Darstellungen, erkannte man das eigentliche Wesen der Zahl π, daß es nämlich eine transzendente Zahl ist. (Achter Teil.)

Jede näherungsweise Darstellung der Zahl π oder allgemeiner der zyklometrischen Funktionen durch konstruierbare Zahlen bzw. Funktionen liefert zugleich konstruktive Näherungsrektifikationen. Das Entsprechende gilt für näherungsweise Darstellungen von $\sqrt[n]{a}$ durch konstruierbare Funktionen von a, oder für solche Darstellungen von (z. B.) $\cos \frac{\alpha}{n}$ durch konstruierbare Funktionen von $\cos \alpha$. (Siebenter Teil.)

Kapitel I.

Goniometrische und zyklometrische Approximationen.

Ältere Geschichte der zyklometrischen und goniometrischen Approximationen, insbesondere der Zahl π.[1])

Der älteste überlieferte Näherungswert für π findet sich in einem ägyptischen Papyrus des britischen Museums, dem Papyrus Ahmes, der nach seinem Entdecker Papyrus *Rhind* heißt[2]), vermutlich ein gegen 2000 v. Chr. geschriebenes Schulheft.[3])

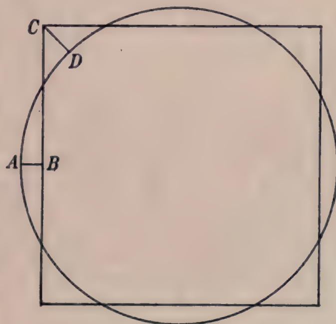
Hier wird als Seite des dem Kreise flächengleichen Quadrates $\frac{8}{9}$ des Durchmessers angegeben, was dem Werte

$$\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}1604\ldots$$

entspricht. Dieser auffallend genaue Wert ist vermutlich, wie überhaupt die frühesten mathematischen Sätze empirisch gefunden; vielleicht durch Vergleich der Inhalte von Hohlmaßen mit quadratischer und mit zirkulärer Basis.[4]) Es ist aber auch denkbar, daß dieser Wert $\frac{8}{9}$ als Mittel aus der Seite des um- und der Seite des einbeschriebenen Quadrates, $\frac{8}{9}$ als Mittel von 1 und

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}707\cdots = (\text{ca.})\,\frac{7}{9}$$

gewonnen wurde. Etwas künstlich erscheint dagegen die Annahme Demmes[5]), diese Quadratur hänge mit dem Zwölfeck zusammen: ein flächengleiches dem Kreise konzentrisches Quadrat schneidet annähernd den Kreis in acht Ecken des regulären Zwölfecks. Demme macht die doppelte Annahme, Ahmes habe bemerkt, daß nahe $CD = 2\cdot AB$ und zweitens, daß CD nahe $\frac{1}{8}$ des Durchmessers sei. Der Umweg über



1) Vgl. Montucla, Histoire des recherches sur la quadrature du cercle ed. Lacroix, Paris 1831. A. de Morgan, Budget of paradoxes, London 1872. H. Schubert, Die Quadratur des Zirkels, Hamburg 1889. Über die Einführung der Bezeichnung π durch Euler (1737, 1748) s. G. Eneström, Bibl. math. III (1889), p. 29, IV (1890), p. 22. Klügel, Math. Wörterbuch, Leipzig 1803, I, p. 653 ff.

2) A. Eisenlohr, Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter, Leipzig 1877. Auf π beziehen sich No. 41, 48, 50.

3) Vgl. hierzu: M. Simon, Gesch. d. Math. im Altertum (Berlin 1909), p. 27.

4) M. Simon l. c., p. 43. M. Curtze, Abh. z. Gesch. d. Math., 8 (1898), p. 63.

5) C. Demme, Schlöm. Ztschr. 31 (1886), Hist.-lit. Abt., p. 132.

das Zwölfeck ist überflüssig; ebenso gut konnte Ahmes nach Zeichnung eines nahezu flächengleichen Quadrates, das vielleicht empirisch gefunden war (s. o.), AB selbst (nicht erst CD) auf dem Durchmesser abtragen.

In dem ältesten mathematischen Buch der Chinesen, dem „heiligen Rechenbuch“ *Tcheou-pei-swan-king*, dessen erster Teil etwa 1100 v. Chr., dessen zweiter zwischen 213 vor und 300 nach Chr. abgefaßt ist, findet sich, und zwar in diesem zweiten Teil, ein viel schlechterer Näherungswert für π (und zwar als *Umfangs*zahl), nämlich $\pi = 3$, den auch die Babylonier[1]) und die Juden[2]) haben. Man muß annehmen, daß dies ein *bewußter* Näherungswert war, denn der Sechsecksumfang hätte bereits $\pi > 3$ erkennen lassen; und daß der Sechsecksumfang gleich dem dreifachen Durchmesser ist, war z. B. den Babyloniern höchst wahrscheinlich bekannt.[3])

An Genauigkeit zwischen dem ägyptischen und dem babylonischen Näherungswert stehen die indischen des Baudhayana.[4]) Von diesem wird zur Zirkulatur des Quadrats der Durchmesser des ihm flächengleichen Kreises als ein Mittel zwischen Seite und Diagonale genommen und zwar gleich $\frac{2}{3}$ der Seite vermehrt um $\frac{1}{3}$ der Diagonale; weil augenscheinlich der einbeschriebene Kreis von dem Quadrat weniger verschieden ist als der umbeschriebene. Hier liegt also das erste Beispiel einer *Approximierung durch Mittelbildung* vor. Die Annahme entspricht dem Werte

$$\sqrt{\frac{4}{\pi}} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{2} = 1{,}138\ldots \text{ statt } 1{,}128\ldots$$

oder dem Werte

$$\pi = 18\left(3 - 2\sqrt{2}\right) = 3{,}0883\ldots$$

Für die umgekehrte Aufgabe nimmt er $\frac{9785}{11136} = 0{,}878682\ldots$ vom Durchmesser als Seite des flächengleichen Quadrates. Das entspricht

$$\sqrt{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\frac{105}{136}} = 0{,}878668\ldots$$

also

$$\pi = \frac{105}{34} = 3{,}0882\ldots,$$

1) Oppert, Journal asiatique, 1872 VIII, 1874 X.

2) Buch 1 der Könige, Kap. 7 Vers 23; Buch 2 der Chronik, Kap. 4 Vers 2. Das gibt Spinoza Veranlassung, die Unwissenheit der jüdischen Sachverständigen zu verspotten. Siehe J. J. Schmidt, Biblischer Mathematicus, Züllichau 1736. Zuckermann, Das Mathematische im Talmud, Breslau 1878.

3) S. M. Simon l. c., p. 113.

4) The Sulvasutras (d. i. Lehre von der Meßschnur) by G. Thibaut, Asiatic Society of Bengal 1875, art. 26 ff.

und ging aus $18(3-2\sqrt{2})$ durch Einsetzen des Näherungswertes

$$\sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}\right)$$

hervor (s. Teil VII, Kap. 1).[1] $\left(\text{Aber auch der schlechtere Wert } \frac{13}{15} \text{ statt } \frac{9785}{11136} \text{ kommt vor; er entspräche } \pi = 3{,}004.\right)$ Nimmt man in der ersten Regel

$$\sqrt{\frac{4}{\pi}} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{2}$$

für $\sqrt{2}$ den Näherungswert $\frac{10}{7}$, so erhält man zur Quadratur des Kreises $\frac{7}{8}$ des Durchmessers als Seite; und zur Zirkulatur des Quadrates $\frac{8}{10}$ der Diagonale als Durchmesser.[2])

Euklid hat vermutlich die Grenzen $3 < \pi < 4$ gekannt[3]), die das einbeschriebene Sechseck und das umbeschriebene Viereck liefern. Der erste Ansatz zu einer methodischen Berechnung der Zahl π stammt von Antiphon[4]), der den Kreisumfang durch eingeschriebene Polygonumfänge von unten approximieren wollte, während Bryson[5]) außerdem die umgeschriebenen zur Approximation von oben und überdies Mittelbildung, wenn auch nur aus den *Vier*ecken i_4 und J_4 (und durch sophistische Fehlschlüsse entstellt) vorschlug (um 450 v. Chr.).[6])

Archimedes (287—212 v. Chr.) hat das systematisch ausgeführt.[7]) Er zeigt, wie man aus den Umfängen u_n, U_n des ein- bzw. umbeschriebenen regulären n-Ecks die Umfänge u_{2n}, U_{2n} findet, und leitet aus

$$\frac{1}{2}\, u_{96} < \pi < \frac{1}{2}\, U_{96}$$

durch Abrundung der unteren Grenze $\frac{6336}{2017{,}25}$ nach unten, der oberen $\frac{14688}{4673{,}5}$ nach oben die Begrenzung her:

$$3\,\frac{10}{71} < \pi < 3\,\frac{1}{7}.$$

1) M. Simon l. c., p. 160. 2) Cantor I, p. 547.

3) Aus Euclidis Elementa IV 15, IV 8, XII 16 konnten diese Grenzen abgeleitet werden.

4) Simplicius' Kommentar zu Aristoteles Physik (hrsg. von H. Diels, Berlin 1882, p. 53). F. Rudio, Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates, Leipzig 1907; Bibl. math. 3 (3) (1902), p. 7. P. Tannery, ib. p. 342.

5) Aristoteles περὶ σοφιστικῶν ἐλέγχων.

6) Vgl. auch K. A. Bretschneider, Die Geometrie und die Geometer vor Euklides (Leipzig 1870), p. 101, 125; und namentlich J. L. Heiberg in Einleitung in die Altertumswissenschaft (hrsg. v. A. Gercke u. E. Noorden, Leipzig u. Berlin) II (1910), p. 424.

7) Κύκλου μέτρησις, prop. III (Opera ed. Heiberg, Leipzig 1880) I, p. 263 ff.

Diese Archimedischen Grenzen 3,1428 ... und 3,1408 ... kommen den Werten $\frac{1}{2} U_{96} = 3{,}1427\ldots$ und $\frac{1}{2} u_{96} = 3{,}1410\ldots$ bis auf 1 bzw. 2 Tausendstel nahe.[1])

Später[2]) findet er für π noch die engeren Grenzen:

$$\frac{211\,875}{67\,441}, \qquad \frac{197\,888}{62\,351}.$$

Er hatte auch den Zusammenhang zwischen Kreis*umfang* und *-inhalt* gefunden; zur Berechnung von π benutzt er die *Umfänge* der Polygone, nicht die *Inhalte*. Er wußte wohl, daß die halben Umfänge $\frac{1}{2} u_n$ eine bessere Annäherung an π ergeben als die Inhalte i_n, denn es ist:

$$i_n = \frac{1}{2} \varrho_n u_n < \frac{1}{2} u_n,$$

da ϱ_n, der Radius des *ein*beschriebenen Kreises, kleiner als Eins ist.

Von den erforderlichen Ungleichungen folgen die auf die *Inhalte* bezüglichen

$$OAB < \text{Sektor } OACB < OADB$$

ohne weiteres aus den allerersten Kreiseigenschaften, daß eine Sehne ganz innerhalb, eine Tangente ganz außerhalb liegt. Von den auf die *Umfänge* bezüglichen

$$AB < \text{Bogen } AB < AD + DB$$

kann man zwar die erste aus dem Archimedischen Satze von der Geraden als kürzesten herleiten[3]); dem entspräche eine Herleitung der zweiten aus dem erst von Legendre

---

1) Leonardo von Pisa hat aus den 96-Ecken die etwas genaueren Grenzen hergeleitet:

$$\frac{1440}{458\frac{1}{5}} = 3{,}1427\ldots \text{ und } \frac{1440}{458\frac{4}{9}} = 3{,}1410\ldots$$

2) In einer verlorenen Schrift περὶ πλινθίδων καὶ κυλίνδρων, die Heron (Metrica I 26 ed. H. Schöne, Leipzig 1903), p. 66/67 erwähnt; die Zahlen sind leider verschrieben, sie heißen vermutlich:

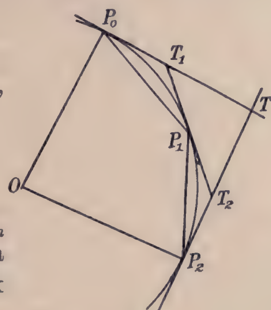
$$\frac{211882}{67441} (= 3{,}1415904\ldots) \text{ und } \frac{195882}{62351} (= 3{,}1416016\ldots)$$

s. P. Tannery, Journ. d. sav. (nouv. sér.) 1 (Paris 1903), p. 205; Apollonius aus Perge und Philon von Gadara gingen in der Annäherung noch etwas weiter (s. Eutokios Komment. zu Arch. ed. Heiberg, Leipzig 1880/81, p. 300).

3) Archimedes, περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου (Opera ed. Heiberg, Leipzig 1880/81), erstes Postulat.

formulierten Satze[1]): Von mehreren konvexen Verbindungslinien zweier Punkte A, B ist die der Geraden $[AB]$ nächste die kürzeste. Aber beide Sätze sind zwar sehr einleuchtend, jedoch mit elementaren Mitteln nicht streng zu beweisen; also ist es zweckmäßiger, die besagten Ungleichungen auf dem Umwege über die Inhalte zu gewinnen. Man kann ja aus $\pi < J_n$ und $J_n = \frac{1}{2} U_n$ folgern $\pi < \frac{1}{2} U_n$, und ähnlich folgt aus $\pi > i_{2n}$ und $i_{2n} = \frac{1}{2} u_n$ $\left(\text{wegen } OACB = \frac{1}{2} AB \cdot OC\right)$, daß $\pi > \frac{1}{2} u_n$ ist.

Übrigens sind die Archimedischen Überlegungen sofort übertragbar auf die Approximierung eines beliebigen Kreisbogens bzw. eines beliebigen Kreissektors aus der zugehörigen Sehne oder Tangente; dann bedeuten u_n, U_n die Umfänge ein- bzw. umbeschriebener regulärer Polygon*züge* und i_n, J_n die Inhalte der zugehörigen Polygonsektoren. Z. B. für den Bogen $P_0 P_1 P_2$ ist



$$u_1 = P_0 P_2, \quad U_1 = P_0 T + T P_2,$$
$$u_2 = P_0 P_1 + P_1 P_2, \quad U_2 = P_0 T_1 + T_1 T_2 + T_2 P_2,$$
$$i_1 = P_0 P_2 O, \quad J_1 = P_0 T P_2 O,$$
$$i_2 = P_0 P_1 P_2 O, \quad J_2 = P_0 T_1 T_2 P_2 O \text{ usw.}$$

Und dieselben Ungleichungen $i_n <$ Sektor $< J_n$ gelten auch für die zugehörigen *Segmente*, da diese sich von den Sektoren nur um das Dreieck $P_0 O P_n$ unterscheiden.

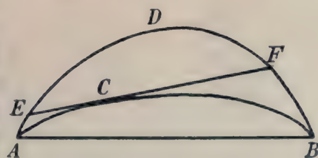
Die zwei wesentlichen Gesichtspunkte der Archimedischen Kreisrechnung liegen *erstens* in der Einschließung, die wir heute schreiben:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x,$$

zweitens in den Formeln, welche den Übergang von i_n, J_n bzw. u_n, U_n zu i_{2n}, J_{2n} bzw. u_{2n}, U_{2n} bewirken z. B.:

---

1) Elemente der Geometrie (deutsch von Crelle, 4. Aufl., Berlin 1844), p. 103. Daß kein *anderer* $\widehat{ADB}$ ein kürzester, also nicht länger als $\widehat{ACB}$ sein kann, folgt durch Ziehen einer Tangente ECF; dann ist jedenfalls $AECFB$ noch kürzer, mit Benutzung des Archimedischen Postulats. Aber daß nunmehr $\widehat{ACB}$ der kürzeste ist, wie Legendre schließen will, würde noch den Nachweis erfordern, daß ein Minimum für alle solchen den Kontur $\widehat{ACB}$ nicht schneidenden Konturen (auf derselben Seite von $[AB]$) existiert; ein Nachweis, der mit einfachen Mitteln nicht streng zu führen ist.



$$u_{2n} = \sqrt{u_n U_{2n}}, \qquad i_{2n} = \sqrt{i_n J_n},$$

$$U_{2n} = \frac{2 u_n U_n}{u_n + U_n}, \qquad J_{2n} = \frac{2 i_{2n} J_n}{i_{2n} + J_n},$$

denen zufolge die zwei Reihen von Größen:

$$\begin{matrix} U_n & u_n & U_{2n} & u_{2n} & U_{4n} & u_{4n} & \ldots \\ J_n & i_{2n} & J_{2n} & i_{4n} & U_{4n} & i_{8n} & \ldots \end{matrix}$$

dasselbe Bildungsgesetz aufweisen: je drei aufeinanderfolgende Glieder stehen abwechselnd in geometrischer und in harmonischer Proportion.

Durch diesen *Archimedischen Algorithmus* wurden also die Sehnen und Tangenten (bzw. sin und tg) der Zentriwinkel *konstruierbarer* Polygone berechenbar. Diese Beschränkung auf *konstruierbare* Winkel war für die *Zyklometrie* unwesentlich, wo es nur darauf ankam, $\sin x$ und $\operatorname{tg} x$ für möglichst kleine, sonst beliebige Winkel x zu ermitteln. Aber neben diesem *zyklometrischen* Ziele macht sich weiterhin, namentlich aus praktischen, nämlich geodätischen und astronomischen Bedürfnissen heraus, das *goniometrische* Ziel geltend: zu *jedem* in Gradmaß gegebenen Bogen die Sehne und die Tangente zu finden. Das erste in dieser Beziehung über Archimedes hinausgehende Resultat hat Aristarch (250 v. Chr.)[1]), der für $\sin 1^0$ die Grenzen $\frac{1}{45}$ und $\frac{1}{60}$ findet. Er bedient sich dabei des der Anschauung entnommenen Satzes, daß der Sinus langsamer wächst als der Bogen, woraus in der Tat $\sin 1^0 > \frac{\sin 30^0}{30}$, also $> \frac{1}{60}$ folgt. Seine obere Grenze hätte er ebenso daraus entnehmen können, daß der Tangens schneller wächst als der Bogen; woraus $\operatorname{tg} 1^0 < \frac{\operatorname{tg} 45^0}{45}$, also auch $\sin 1^0 < \frac{1}{45}$ folgt. Seine Herleitungen sind minder einfach.

Die Formeln des Heron (zwischen 100 vor und 100 n. Chr.)[2]), die ja auch die Sehnen zu einigen nicht konstruierbaren Winkeln, wenn auch bloß roh, approximieren, mögen hier nur kurz erwähnt werden. Sie dienten anderen Zwecken und beschäftigen uns weiter unten. Schärfere Resultate verlangte die Astronomie. Ptolemäus[3]) (125 bis 151 n. Chr.) hatte das Additionstheorem der goniometrischen Funktionen gefunden. Um damit eine Sehnentafel mit möglichst kleinem Intervall zu berechnen, mußte man vor allem die Sehne zu einem

1) *Περὶ μεγεθῶν* usw., lat. von Commandinus 1572, deutsch von Nizze 1856.

2) l. c. I, Prop. XVII bis XXV; ferner Geometria. Mensurae. Liber Geeponicus ed. Hultsch (Berlin 1864), p. 134, 206, 218, 229. Über die zweifelhafte Echtheit dieser drei Schriften s. J. L. Heiberg, Arch. f. d. Gesch. d. Naturwiss. u. d. Techn. 1 (Leipzig 1909), p. 118.

3) *Μαθηματικὴ (μεγάλη) σύνταξις* (der später sog. Almagest) VI, c. 7, ed. Halma I, 421, ed. Heiberg 513.

möglichst kleinen Winkel ermitteln. Als solcher kam zunächst der Winkel von einem Grad in Betracht, der aber nicht konstruierbar war.

In der Sexagesimalteilung des Kreises lag also die Veranlassung, sozusagen der Zwang, über die Archimedische Methode hinauszugehen; das wäre z. B. nicht nötig gewesen, wenn der Kreis in $320 = 5 \cdot 2^6$ Teile geteilt worden wäre. Ptolemäus schließt zur Berechnung der Sehne

$$\text{crd } 1^0 = s_{360}$$

diese nach dem von ihm bewiesenen Aristarchschen Satze in die Grenzen

$$\frac{2}{3} \text{ crd } \frac{3^0}{2} < \text{crd } 1^0 < \frac{4}{3} \text{ crd } \frac{3^0}{4}$$

ein, die wegen $\frac{3^0}{4} = \frac{360^0}{15 \cdot 32}$, $\frac{3^0}{2} = \frac{360^0}{15 \cdot 16}$ nach der Archimedischen Methode zu berechnen waren. In Sexagesimalbrüchen ausgedrückt liefern beide Grenzen abgerundet den Wert:

$$\frac{1}{60} + \frac{2}{60^2} + \frac{50}{60^3}.$$

Daraus folgert Ptolemäus beiläufig

$$\pi = 180 \cdot s_{360} = \frac{377}{120} = 3{,}141\bar{6},$$

also einen sehr genauen Wert; aber es bleibt wegen der Abrundung unentschieden, ob Annäherung von unten oder oben stattfindet und wie stark die Annäherung ist.

Weiterhin wird der theoretische zyklometrische neben dem praktischen goniometrischen Gesichtspunkt oft aus den Augen verloren. Als Weiterbildung der Aristarch-Ptolemäischen Interpolation ist Theons (365 n. Chr.)[1]) Bemerkung anzusehen, daß die Differenzen der Sehnentafel abnehmen, und die der Inder[2]), daß die zweiten Differenzen den Sinus proportional sind. Damit wurde eine Sinustafel mit dem Intervall $3^0 45' = \frac{360^0}{96}$, also nur für konstruierbare Winkel berechnet, während Bhaskara (1114)[3]) mit dem Ptolemäischen Additionstheorem eine solche von Grad zu Grad berechnet. Wie er aber $\sin 1^0$ berechnet, verrät er nicht; seine merkwürdige Näherungsformel, um die Sehne durch den Bogen auszudrücken, ist hierfür nicht genau genug. Sie wird uns später unter anderem Gesichtspunkte beschäftigen.

Abul Wafa (940—998)[4]) schließt auf Grund des Theonschen

1) Kommentar zum Almagest ed. Halma lib. II.

2) Surya-Siddhanter (ca. 300 n. Chr.), Brahmagupta (geb. 598).

3) H. Th. Colebrooke, The algebra of Brahmagupta and Bhaskara. London 1817.

4) Almagest, Manuskr. No. 1138 der Bibl. royale in Paris; z. T. veröffentlicht von Carra de Vaux, Journal asiatique (8) XIX, p. 408 ff.

Satzes $\sin\frac{1^0}{2} - \sin\frac{15^0}{32}$ in die nach der Archimedischen Methode zu berechnenden Grenzen ein[1]):

$$\frac{1}{3}\left(\sin\frac{18^0}{32} - \sin\frac{15^0}{32}\right) < \frac{1}{3}\left(\sin\frac{15^0}{32} - \sin\frac{12^0}{32}\right),$$

deren Mittel ihm auf zwölf Stellen richtig

$$\sin\frac{1^0}{2} = 0{,}008\,726\,535\,498$$

ergibt. Das ergibt $\pi = 3{,}14155\ldots$ Allgemeiner interpoliert Leonardo von Pisa (um 1200) u. a. nach „Proportionalteilen", d. h. indem er die Differenzen der Winkel in einer Tafel denen der Sinus proportional setzt.

Ähnlich wie Abul Wafa geht *Levi ben Gerson Israelita* († 1344) vor.[2]) Er berechnet durch Archimedische Halbierungen und das Ptolemäische Additionstheorem die Sehnen der einander sehr nahen Winkel

$$\frac{33^0}{128} = \frac{1^0}{4} + \frac{1^0}{128} \quad \text{und} \quad \frac{15^0}{64} = \frac{1^0}{4} - \frac{1^0}{64};$$

diese sind den Bögen so nahe proportional, daß er

$$\operatorname{crd}\frac{1^0}{4} = \frac{2}{3}\operatorname{crd}\left(\frac{1^0}{4} + \frac{1^0}{128}\right) + \frac{1}{3}\operatorname{crd}\left(\frac{1^0}{4} - \frac{1^0}{64}\right)$$

setzen kann. Er findet daraus

$$\operatorname{crd} 15' = \frac{15}{60^2} + \frac{42}{60^3} + \frac{28}{60^4} + \frac{12}{60^5} + \frac{27}{60^6}.$$

Das gäbe $\pi = 3{,}14157\ldots$

Johannes Müller Regiomontanus (1436—1476)[3]) berechnet $\sin 1^0$ aus der Begrenzung:

$$\frac{4}{3}\sin\frac{3^0}{4} > \sin 1^0 > \frac{2}{3}\sin\frac{3^0}{4} + \frac{1}{3}\sin\frac{3^0}{2},$$

in der die obere Grenze die obere Ptolemäische, die untere das Mittel der beiden Ptolemäischen ist; daß das eine *untere* Grenze ist, folgt aus dem Satze des Theon. Durch Interpolation nach Proportionalteilen verkleinert er das Intervall bis auf 1'.

Dagegen hatte der Tartar *Ulug Beg* (1393—1449) einen neuen Weg eingeschlagen[4]), um von $\sin 3^0$ zu $\sin 1^0$ zu kommen, den Ptole-

1) Ähnlich sein Zeitgenosse Ibn Jûnus:

$$\sin 1^0 = \frac{1}{3}\cdot\frac{8}{9}\cdot\sin\frac{9^0}{8} + \frac{2}{3}\cdot\frac{16}{15}\cdot\sin\frac{15}{16},$$

der also zwischen den nach dem Aristarchschen Satze gebildeten Grenzen nach Proportionalteilen interpoliert.

2) Leo de Balneolis Israhelita de sinibus, chordis et arcubus etc. Cod. Vindob. Pal. 5277 (Philos. 68). Kommentiert von M. Curtze.

3) Seine Sinustafeln von Minute zu Minute sind angehängt dem Werke: Quadratum geometricum praeclarissimi Mathematici Georgii Burbachii. Norimbergae 1516/17.

4) Überliefert von Meriem el-Tschelebî († 1412) in seinem Kommentar zu Ulug Begs Sinustafeln.

mäus umgehen mußte: nämlich die wirkliche numerische Auflösung der Dreiteilungsgleichung:

$$\sin x = \frac{4}{3} \sin^3 x + \frac{1}{3} \sin 3x$$

für $x = 1^0$. Sein Verfahren ist genau das, was wir heute als das Newtonsche bezeichnen[1]): ist u ein Näherungswert für die Wurzel der Gleichung $f(u) = 0$, $u + \varepsilon$ der wahre Wert, so ergibt sich für die Korrektur ε ein Näherungswert aus der Gleichung $f(u + \varepsilon) = 0$, die linear in ε wird, indem man höhere Potenzen von ε vernachlässigt. Ulug Beg fand

$$\text{crd } 1^0 = \frac{1}{60} + \frac{2}{60^2} + \frac{49}{60^3} + \frac{43}{60^4} + \frac{11}{60^5}.$$

Das gibt $\pi = 3{,}14157\ldots$

Um eine Sinustafel bis auf Minuten und Sekunden herzustellen, konnte man zu den Dreiteilungen noch die Fünfteilungen hinzunehmen. Das empfiehlt Fr. Vieta[2]), und führten J. Bürgi (1552—1632)[3]) und Pitiscus (1561)[4]) wirklich aus; Bürgi und Vieta kannten die allgemeinen Winkelteilungsgleichungen und das Ulug Begsche Näherungsverfahren. Vieta berechnete sin 1′ auf zehn Stellen richtig durch eine bisher nicht aufgeklärte Interpolation zwischen $\sin \frac{450'}{256}$ und $\sin \frac{225'}{256}$, deren Werte er durch Archimedische Halbierungen findet.

Rhäticus (1542—1576)[5]) wiederum *vermeidet* die Dreiteilung, wendet vielmehr in ausgedehntestem Maße die Archimedischen Halbierungen an. Er berechnet den Sinus für die Winkel

$$\frac{90^0}{2^k} (k = 1, 2, 3, \cdots, 43),$$

daraus nach dem Additionstheorem z. B. den von

$$\alpha = 90^0 \left(\frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^8} - \frac{1}{2^{11}} - \frac{1}{2^{13}}\right) = 29''59'''33^{\mathrm{IV}}37^{\mathrm{V}}58^{\mathrm{VI}}8^{\mathrm{VII}}30^{\mathrm{VIII}},$$

der sich sehr genau zum sin 30″ wie $\alpha : 30''$ verhält, woraus sich erst sin 30″, dann sin 1′ ergibt usw. Ähnlich bestimmt er sin 5″ und daraus die Werte des Sinus von 10 zu 10″.

Die Werke des Rhäticus und Pitiscus sind als Abschluß dieser numerischen Entwicklung der Goniometrie anzusehen. Man konnte

---

1) Dasselbe wandten zur Ausziehung der Quadratwurzeln schon die Inder an: l. c. (S. 181[3])), Kap. I, 6.

2) Opera ed. Schooten Lugd. 1646.

3) S. R. Wolf, Astron. Mitt. No. XXXI.

4) Trigonometriae libri quinque (Ed. 2) 1608.

5) Opus Palatinum L. V. Otho 1596.

nunmehr zu jedem in Gradmaß gegebenen Bogen den Sinus usw. mit großer, wenn auch nicht beliebig großer Annäherung und umgekehrt finden.

Verfolgen wir nun den zyklometrischen Gesichtspunkt, der an die Einschließung

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

anknüpft. Es kam zur Berechnung von π nur darauf an, den sin und tg eines möglichst kleinen sonst beliebigen Winkels möglichst genau zu finden. Die Römer haben diese Frage nicht gefördert; ihnen genügte der Archimedische Wert $3^1/_7$, der oft[1]) durch den ungenaueren $3^1/_8$ ersetzt wird. Vermutlich wurde der Wert $3^1/_8$ nicht nur der einfacheren Rechnung halber bevorzugt, sondern namentlich auch, weil er eine einfache Quadratur erlaubt: die Diagonale des flächengleichen Quadrates ist nahe gleich $\frac{10}{8}$ des Durchmessers (s. S. 177).[2]) Gebert (um 1000) dagegen empfiehlt den ersteren als besser.[3])

Arya-Bhatta (476 n. Chr.) berechnet nur die u_n (nicht die U_n) bis zu $u_{6\cdot 64} = u_{384}$, aber nach der bequemeren Formel:

$$s_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - s_n^2},$$

so daß also π der Grenzwert der Ausdrücke ist:

$$2s_4 = 2\sqrt{2}, \quad 4s_8 = 4\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

$$8s_{16} = 8\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \quad 16s_{32} = 16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}},$$

usw.; er findet

$$\pi = \frac{3927}{1250} = 3{,}1416.\,^{4})$$

Bei solchen einseitigen Annäherungen erhält man etwa soviel richtige Stellen für π, als in u_{2n} und u_n übereinstimmen. Ähnlich Bhaskara (1150), der außerdem den Ptolemäischen Wert $\frac{377}{120}$ kannte.[5]) Brahmagupta (650) schloß aus:

$$\frac{1}{2}u_{12} = \sqrt{9{,}65}, \quad \frac{1}{2}u_{24} = \sqrt{9{,}81}, \quad \frac{1}{2}u_{48} = \sqrt{9{,}86}, \quad \frac{1}{2}u_{96} = \sqrt{9{,}87},$$

daß schließlich:

$$\pi = \frac{1}{2}u_\infty = \sqrt{10}$$

1) Z. B. bei Vitruvius Pollo (s. Cantor I, p. 462), später z. B. bei Charles Bouvelles (s. M. Curtze, Jenaer Lit.-Ztg. 1876, p. 109).

2) Diese Quadratur hat auch A. Dürer l. c., Bogen F, Blatt VI, Fig. 34.

3) Oeuvres ed. Olleris, Clermont 1867, p. 463.

4) Bija Gavita: or the algebra of the Hindus. By Edw. Strachey, London 1813. Leçons de calcul d'Aryabhata, L. Rodet, Journal asiatique 1879 (7) XIII, p. 10, 21.

5) Algebra . . . from Brahmagupta and Bhaskara, trans. by H. T. Colebrooke, London 1817 XII, art. 40, p. 87, 95, 308.

sei. Diese beiden indischen Werte finden sich, wie auch der Archimedische und der Ptolemäische bei den Arabern, z. B. Muhammed ben Musa[1]); die Chinesen haben die Werte 3, $\frac{22}{7}$, 3,14 (Liuhway, 650 n. Chr.)[2]); die Japaner 3, 3,16, 3,14, 3,1415926, letzterer 1663 aus den 2^{15}-Ecken gewonnen;[3]) Purbach 3,1416[4]), Regiomontan 3,14243.[5])

Vieta rechnet einerseits[6]) nach Archimedes bis zu $u_{6\cdot 2^{16}}$ und $U_{6\cdot 2^{16}}$ und findet π zwischen 3,1415926535 und 3,1415926537. Andrerseits knüpft er an Antiphon an und will möglichst einfach von i_n (ohne J_n) zu i_{2n} kommen; das erreicht er ähnlich wie Arya Bhatta und Gregory (s. S. 186) vermittels:

$$i_{2n} = \frac{1}{\varrho_n} i_n, \quad \varrho_n = \sqrt{1 - \frac{1}{4} s_n^2}.$$

Aber er geht darüber hinaus, indem er von den s_n absieht und nur die Reihe der $\varrho_n, \varrho_{2n}, \ldots$ ins Auge faßt; hier ist:

$$\varrho_{2n} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varrho_n},$$

und daraus ergibt sich ihm, von $i_4 = 2$ ausgehend[7]):

$$\frac{i_4}{\pi} = \frac{i_4}{i_8}\frac{i_8}{i_{16}}\frac{i_{16}}{i_{32}}\cdots, \quad \text{also} \quad \frac{2}{\pi} = \varrho_4\varrho_8\varrho_{16}\cdots,$$

d. h.:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\ \text{usw.}^{8)},$$

damit war wohl die erste gesetzmäßige Darstellung von π gefunden (1593).

Auf dem Archimedischen Wege berechnete Adrian van Romen (1593) π auf 15 Stellen aus den $15\cdot 2^{24}$-Ecken. Ludolf von Cöln

---

1) The algebra of Muhammed ben Musa, ed. F. Rosen, London 1831, p. 71 ff.

2) K. L. Biernatzki, Die Arithmetik der Chinesen, Crelles J. 52 (1856), p. 59.

3) T. Hayashi, Bibl. math. (3) 3 (1902), p. 273.

4) Im Appendix zu De Triangulis von Regiomontan, Basel 1541, p. 131.

5) In seiner Korrespondenz mit Nic. von Cusa, De quadratura circuli, Nürnberg 1533.

6) Canon Mathematicus seu ad Triangula, Paris 1579, p. 56, 66.

7) Vietae opera ed. Schooten, Leyden 1646, p. 400. Vgl. auch Snellius Cyclometricus 1621, prop. I u. II.

8) Über die Konvergenz dieses Produktes s. Rudio, Schlömilchs Ztschr. 36 (1891), Hist.-lit. Abt., p. 139 und weiter unten, wo wir die allgemeinere Eulersche Formel betrachten werden. (Vgl. auch Seidel, Crelles J. 73 (1871) p. 273).

(1540—1610) aus den $15 \cdot 2^{37}$-Ecken (1596) erst 20 $\left(\text{mit der Formel } 1 - \varrho_n = \frac{1}{2} s_{2n}^2\right)$, dann aus dem 2^{62}-Eck 32, schließlich 35 Stellen.[1]) Er rechnete nach dem Verfahren des Arya Bhata. Zu den rationalen Näherungswerten des Archimedes, des Ptolemäus und der Inder fügte Adrian Metius[2]), der Vater, (1585) den Wert $\frac{333}{106}$ und dann durch Komposition (Mittel der Zähler durch Mittel der Nenner) dieses mit dem Ptolemäischen $\frac{377}{120}$ den besonders glücklichen

$$\frac{355}{113} = 3{,}141592\ldots$$

hinzu, der kleinere Zahlen hat und doch genauer als der indische ist.[3])

Das Verfahren von Arya Bhata findet sich in allgemeinerer Weise bei J. Gregory (1668).[4]) Er beweist, daß eine nach dem Archimedischen Algorithmus (s. S. 180) gebildete Reihe positiver Größen:

$$A,\ B,\ C,\ D,\ \ldots$$

gegen einen Grenzwert Z *konvergiert* und daß man sich diesem Grenzwert auch durch eine Reihe von Größen nähert, die durch bloße Quadratwurzelausziehungen gewonnen werden. Definiert man nämlich der Reihe nach die Größen $L, M, O, P, Q, R, \ldots$, deren erste beliebig ist, durch die Gleichungen:

$$B : C = 2L : M,$$

$$O^2 = 4L^2 - M^2, \qquad P^2 = 2L^2 + LM,$$

$$Q^2 = 4L^2 - P^2, \qquad R^2 = 2L^2 + LP,$$

$$S^2 = 4L^2 - R^2, \qquad \text{usw.}$$

---

1) Van den Circkel, Delf 1596; De circulo, Leyden 1619, p. 3. De Arithmetische en Geometrische Fondamenten, Leyden 1615, p. 163; lat. von Snell, Fundamenta Arithmetica et Geometrica, Leyden 1615. 2. Aufl., mit lat. Übersetzung der Schrift Van den Circkel, unter dem Titel: De Circulo (1619), p. 3, 29 ff., 92.

2) A. Metius, Arithmeticae libri duo et Geometriae, Leyden 1626, p. 88 ff.

3) Hermann Benning, ein Glockengießer in Hamburg, soll π auf 45 Stellen mit bloß einer Wurzelziehung berechnet und darüber anonym (1678) eine Abhandlung von $2^1/_2$ Bogen verfaßt haben (s. Paul Halcke, Mathematisches Sinnenkonfekt, Hamburg 1719, p. 340).

4) Exercitationes geometricae, London 1668. Wir haben uns später mit anderen Quadraturformeln Gregorys zu befassen, über die er mit Huygens in Streit geriet. Vgl. Journal des Sçavans 1668 und Philosoph. Transactions III. Die hierauf bezüglichen Schriften auch die Vera circuli et hyperbolae quadratura, aber auffallenderweise nicht die in den Exercitationes geometricae enthaltenen Appendicula ad veram circuli et hyperbolae quadratura findet man abgedruckt in Hugenii Opera Varia. Lugd. Bat. 1724. So sind die Appendicula und überhaupt die Exercitationes fast unbekannt geblieben. Wir kommen weiter unten auf andere Resultate dieser Schrift zurück.

so ist:

$$C : E : G : J : \cdots = O : 2Q : 4S : 8U : \cdots \text{ usw.}$$

Man braucht hier nur $A = i_n$, $B = J_n$, $C = i_{2n}$ usw., ferner $2L = 1$, also $M = \frac{C}{B} = \cos\frac{\pi}{n}$ so setzen, so erhält man:

$$\frac{O}{C} \cdot \dot{i}_\infty = \frac{1}{n} \dot{i}_\infty$$

als Grenzwert der Ausdrücke:

$$2\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{M}{2}}, \quad 4\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{M}{2}}},$$

$$8\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{M}{2}}}} \text{ usw.}$$

Gregory hatte auch gefunden[1]), daß der Archimedische Algorithmus ohne weiteres zur Berechnung von Ellipsen- und Hyperbelsektoren benutzt werden kann, indem man unter *regulären* Polygonzügen $P_0 P_1 P_2 \ldots$ solche versteht, bei welchen die Tangente in P_h zur Sehne $P_{h-1} P_{h+1}$ parallel ist. Für die Ellipse ergibt sich uns heute die Übertragung der Sätze vom Kreise $x^2 + y^2 = a^2$ auf die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ohne weiteres durch die affine Transformation:

$$x \parallel x,$$

$$y \parallel \frac{a}{b} y,$$

wobei Flächen*verhältnisse*, also alle homogenen Relationen zwischen Flächen erhalten bleiben; die affine Transformation kann man auch durch Parallelprojektion versinnlichen: der Kreis wird orthogonal in eine Ellipse projiziert, wenn seine Ebene gegen die Projektionsebene um den Winkel $\arccos\frac{b}{a}$ geneigt wird. Für die Hyperbel würde die entsprechende affine Transformation den Durchgang durch das Imaginäre erfordern. Aber zum Beweise des einzig notwendigen Satzes: ein Kegelschnittsektor AOB wird durch den Radius OC halbiert, wenn die Tangente in C parallel zur Sehne $[AB]$ ist, braucht man nur, was offenbar stets möglich ist, die Figur orthogonal so auf eine andere Ebene zu projizieren, daß der Winkel zwischen $[OC]$ und $[AB]$ in einen Rechten projiziert wird. Denn dann wird $[OC]$ Achse des neuen Kegelschnitts, und dessen Sektor AOB liegt symmetrisch zur Achse, wird also durch OC halbiert.

1) Vera circuli et hyperbolae quadratura. Patavii 1667.

Kapitel II.[1]

Approximierung durch Mittelbildung.

Nikolaus von Cusa (1401—1464).[2]

Bezeichnet man in der obigen Ungleichung (S. 178)

$$AB < \widehat{AB} < AD + DB,$$

$\widehat{AC} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$ mit x, so wird dieselbe:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x,$$

d. h. der Quotient:

$$\sin x \cdot \frac{1+\delta}{\cos x + \delta}$$

ist für $\delta = 0$ größer als x, für $\delta = \infty$ kleiner als x.

Es scheint, daß Nikolaus von Cusa durch eine ähnliche Überlegung zu der Frage geführt wurde: Wo liegt x zwischen $\sin x$ und $\operatorname{tg} x$, oder für welche Werte von δ ist jener Bruch genau gleich x? Indem er für x den halben Zentriwinkel des Quadrats und des Sechsecks wählt, findet er durch Rechnung nahezu: $\delta = 2$ und vermutet nun, daß allgemein $\delta = 2$, also:

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{3}{2 + \cos x}$$

ist. Natürlich gilt diese Formel nur näherungsweise. In der eingeführten Schreibweise wäre sie folgendermaßen zu schreiben:

$$\frac{x}{\sin x} \doteqdot \frac{3}{2 + \cos x}. \tag{1}$$

Man kann diese Formel als durch Nikolaus von Cusa *empirisch*, d. h. numerisch bewiesen ansehen. Einen deduktiven Beweis, bei dem es also auf das Zeichen $\doteq$ oder $\mathrel{\underset{\cdot}{=}}$ ankommt, versuchte zuerst Snellius, indem er dabei den *Bogen* x mit der *Strecke* $\frac{3 \sin x}{2 + \cos x}$ verglich. Sein Beweis ist nicht einwandfrei und ein Beweis vielleicht auf diesem Wege überhaupt nicht zu erhalten. Streng bewiesen, und zwar durch Vergleichen von *Flächen* wurde die Formel von Huygens, wobei sich Snellius' Behauptung bestätigte, daß darin das Zeichen $\doteqdot$ durch $\mathrel{\underset{\cdot}{=}}$ zu ersetzen ist.

---

1) Im folgenden bedeutet $\doteq$ etwas größer als, $\mathrel{\underset{\cdot}{=}}$ etwas kleiner als, $\doteqdot$ nahe gleich.

2) De mathematica perfectione, Opera (Paris 1514, Basel 1565).

Übrigens ist diese Formel ziemlich genau. Sie gibt z. B.:

$36^0 50'$ statt $36^0 52'$,

$22^0 37'$ statt $22^0 37' 11\frac{1}{2}''$,

$16^0 15' 36''$ statt $16^0 15' 36\frac{3}{4}''$.[1])

Willebord Snellius (1580—1626).[2])

Nimmt man in der Winkeldreiteilungsfigur (von S. 82) statt des Trisektionspunktes P, für den $PQ = 1$ ist, den approximativen Trisektionspunkt P, für den $PR = 1$ ist, so liefert die Figur die Proportion:

$$ST : \sin x = 3 : (2 + \cos x),$$

d. h. nach der obigen Formel, es ist $ST \doteq x$, so daß der approximative Trisektionspunkt zugleich ein approximativer Rektifikationspunkt ist.

Um die Formel in der Snelliusschen Form zu beweisen, wäre also:

$$ST \doteq x$$

nachzuweisen. Der Beweis, den Snellius hierfür gibt, ist, wie gesagt, nicht einwandfrei; aber die Richtigkeit vorausgesetzt, leitet Snellius aus derselben Figur eine zweite Näherungsgleichung her.

Zieht man nämlich die Parallele UOV zu PQT, so zerfällt ST in zwei Teile, von denen

$$VT = QU \doteq 2 \sin \frac{x}{3},$$

$$SV \doteq \operatorname{tg} \frac{x}{3}$$

ist. Folglich ergibt sich:

$$x \doteq 2 \sin \frac{x}{3} + \operatorname{tg} \frac{x}{3},$$

oder wenn man $3x$ statt x setzt[3]):

$$x \doteq \frac{2 \sin x + \operatorname{tg} x}{3}. \qquad (2)$$

---

1) C. H. Gietermaker (t' Vergulde Licht der Zeevart, Amsterd. 1693) schreibt die Formel für den praktischen Gebrauch x (in Graden) $= \frac{171\frac{8}{9} \sin x}{2 + \cos x}$; s. Kästner, Geom. Abh. I (Gött. 1790), p. 166. Albert Girard (Tables des sinus usw., Haag 1626, 12° Bogen K, Blatt 8) soll eine ähnliche genauere Formel haben. Über die praktische Brauchbarkeit der Formel s. Schlömilch, Schlöm. Ztschr. 2 (1857), p. 330.

2) Cyclometricus, Lugd. Bat. 1621.

3) Über die Genauigkeit dieser Formel s. Lambert, Beiträge II, p. 311.

In dieser Formel ist, wie Snellius nicht streng beweist, das Zeichen $\doteqdot$ durch das Zeichen $\doteq$ zu ersetzen.

Man kann diese beiden Formeln von Nikolaus von Cusa und Snellius in den einen Ausspruch zusammenfassen: der Bogen x ist nahezu gleich dem *arithmetischen* oder auch dem *harmonischen* Mittel zwischen $\sin x$ und $\operatorname{tg} x$, mit dem Gewichtsverhältnis $2:1$ (s. S. 81) und zwar etwas kleiner als das harmonische, etwas größer als das arithmetische Mittel.

Wendet man die Formeln auf die Berechnung von π an, so findet man schon für $n = 6$, woraus Archimedes nur die Grenzen 3 und 3,464 erhalten hätte, die viel engeren Grenzen: 3,14022 und 3,14160, die noch enger sind als die von Archimedes aus den 96-Ecken hergeleiteten. Die 96-Ecke liefern Snellius aber die Grenzen

$$3{,}1415926272\ldots \text{ und } 3{,}1415928320\ldots,$$

und 34 Stellen erhält Snellius mit den 2^{30}-Ecken, während Ludolf daraus nur 14 erhalten hätte. Grienberger[1]) berechnete nach der Snelliusschen Formel 39 Stellen. Überhaupt liefert die Archimedische Begrenzung $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ etwa $[2 \log n - 1{,}19]$ richtige Dezimalstellen, die Snelliussche etwa $[4 \log n - 0{,}276]$, also etwa doppelt so viel, so daß die n-Ecke bei Snellius ein ebenso genaues Resultat geben wie die n^2-Ecke bei Archimedes. Benutzt man nämlich die später abzuleitenden Reihen:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots,$$

so findet man den Fehler der Formel:

$$\pi = n \sin \frac{\pi}{n}$$

für große n etwa gleich $\frac{\pi^3}{6n^2}$, also stimmen π und $n \sin\frac{\pi}{n}$ auf etwa $-\log\frac{\pi^3}{6n^2}$ Stellen überein, d. h. auf etwa $2\log n - \log\frac{\pi^3}{6}$; ebenso findet man für die Formel:

$$\pi = n \cdot \frac{3 \sin \frac{\pi}{n}}{2 + \cos \frac{\pi}{n}}$$

den Fehler $\frac{\pi^5}{180 n^4}$, also etwa $4 \log n - \log\frac{\pi^5}{180}$ richtige Stellen usw.

Snellius nimmt auch den wahren Trisektionspunkt als Rektifikationspunkt, d. h. er nimmt in der Gleichung:

$$x = \sin x \cdot \frac{1 + \delta}{\cos x + \delta},$$

statt $\delta = 2$, wie Nikolaus von Cusa, $\delta = 2 \cos\frac{x}{3}$.

---

1) Elementa Trigonometriae, Rom 1630.

Genauer ist, wie wir später sehen werden:

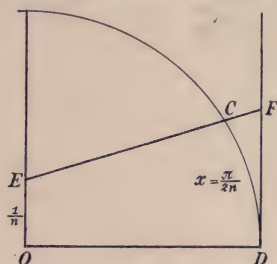
$$\delta \doteq 2\cos\left(\frac{x}{\sqrt{10}}\right)$$

oder einfacher das Stück, um das der approximative Trisektionspunkt nach rechts zu verschieben ist:

$$2 - \delta \doteq \frac{2}{10} \cdot \sin\operatorname{vers} x,$$

wie später bei Newton und Lambert (s. u.).

Die Figur, welche Snellius zur Herleitung der beiden Formeln benutzt, und sein Ausdruck „limes trisectionis" (a. a. O., S. 44) für den Punkt P läßt deutlich erkennen, daß er dabei an die alte Trisektionsfigur der Griechen anknüpft. Wenigstens ist dies wahrscheinlicher, als daß er durch eine Betrachtung des Philipp von Landsberg hierauf geführt wurde.[1]) Dies ist die folgende:



Ist in nebenstehender Figur

OE gleich $\frac{1}{n}$ des Radius,

$\widehat{CD} = x = \frac{1}{n}$ des Quadranten,

so ist $DF \doteq x$.

Dieser Satz ist wiederum nicht streng bewiesen; er liefert für x eine Näherungsdarstellung, die aus der Proportion folgt:

$$\cos x : \sin x - \frac{1}{n} \doteq 1 : x - \frac{1}{n},$$

woraus

$$x \doteq \frac{n \sin x + \cos x - 1}{n \cos x} \tag{3}$$

folgt. Diese Formel ist in doppelter Beziehung von ganz anderer Art als die bisher betrachteten: Nämlich erstens leistet sie nicht wie jene eine Näherungsrektifikation eines *beliebigen* Bogens x, und andrerseits haben die früheren Formeln die Eigenschaft, um so genauer richtig zu sein, je kleiner der Bogen x ist, während das bei der Formel (3) nicht der Fall ist. So haben z. B. die Gleichungen:

$$x = \sin x, \quad x = \operatorname{tg} x,$$

wie sich aus den später abzuleitenden Reihenentwicklungen ergibt, drei Wurzeln gleich 0; (die übrigen sind bei der ersten Gleichung imaginär, bei der zweiten reell); und die Gleichungen

$$x = \frac{3 \sin x}{2 + \cos x}, \qquad x = \frac{2 \sin x + \operatorname{tg} x}{3}$$

1) Wie v. Braunmühl vermutet, Gesch. d. Trig. I, p. 242.

sogar die Wurzel 0 fünffach. Derartige Approximationen nennen wir *oskulierende.* Die obige Formel (3) gibt, wenn man darin $n = \frac{\pi}{2x}$ einsetzt:

$$(1 - \cos x) \frac{2}{\pi} = \frac{\sin x}{x} - \cos x.$$

Diese Gleichung hat offenbar die Wurzel $x = 0$ nur zweifach, und eine gute Approximation wird außerdem in der Nähe von $x = \frac{x}{6}$ geliefert; (setzt man in ihr dagegen für π den Näherungswert 3 ein, so erhält man die Formel des Nikolaus von Cusa). Approximationen dieser Art wollen wir als *interpolierende* bezeichnen.

Philipp v. Lansberg soll aus seiner Formel für $n = 256$ erst π auf 6, dann auf 28 Stellen berechnet haben.[1])

Orontius Finäus (1494—1555).[2])

Dieser hat zwei Sätze ausgesprochen, die in unserer jetzigen Ausdrucksweise lauten würden:

$$x \doteq \sqrt[3]{\sin^2 x \cdot \operatorname{tg} x},$$

d. h. der Bogen ist nahe gleich dem *geometrischen* Mittel aus $\sin x$ und $\operatorname{tg} x$ mit dem Gewichtsverhältnis $2:1$.

Aber er sprach diesen Satz nur für den halben Zentriwinkel des Quadrates aus und glaubte, daß er hier genau richtig ist. Das würde für π den Wert:

$$\pi = \sqrt[3]{32} = 3{,}17\ldots$$

ergeben. Es ist dies also eine ähnliche Mittelbildung wie die oben (S. 176) erwähnte des Baudhayana, nur daß hier das geometrische, dort das arithmetische Mittel genommen wurde.

Die Formel selbst, richtig und allgemein und mit Bestimmung des Zeichens $\doteq$ oder $\mathrel{\overline{\cdot}}$ wurde von Huyghens (s. u.) bewiesen.

Übrigens folgt aus jeder der drei analogen Formeln von Nicolaus, Snellius, Orontius für kleine x:

$$x \doteq \frac{3}{\frac{1}{\operatorname{tg} x} + \frac{2}{\sin x}}, \qquad x \doteq \frac{\operatorname{tg} x + 2 \sin x}{3}, \qquad x \doteq \operatorname{tg}^{\frac{1}{3}} x \cdot \sin^{\frac{2}{3}} x$$

jede der beiden andern, sofern es nur auf die Tatsache der *Annäherung,* nicht auf das *Zeichen* ankommt. Denn bei zwei wenig ver-

1) v. Braunmühl l. c. I, p. 176.

2) De rebus mathematicis hactenus desideratis, Paris 1556. Die Irrtümer dieser Schrift wurden zuerst von Pedro Nunez gen. Nonius (1492—1577) in seiner Schrift: De erratis Orontii Finaei widerlegt.

schiedenen Zahlen sind auch das harmonische, geometrische, arithmetische Mittel wenig verschieden, und zwar bei beliebigem Gewichtsverhältnis.

Jakob Gregory (1638—1675).

Er fügt zu den Formeln von Nikolaus von Cusa und Snellius neue derselben Art hinzu. Statt ein- *und* umgeschriebene Polygone zu kombinieren, konnte man ja z. B. *nur* die eingeschriebenen benutzen und aus zweien derselben i_n und i_{2n} eine genauere Grenze ableiten. Gregory gibt in dieser Hinsicht die Formel[1]):

$$x \doteq \frac{4}{3} i_{2n} - \frac{1}{3} i_n,$$

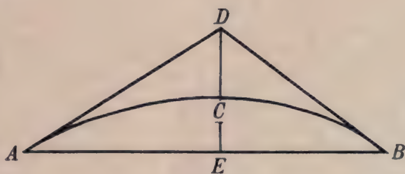
die also eine Art Extrapolation darstellt. Und da man nunmehr wieder zwei Grenzen hat:

$$\frac{1}{3} i_{2n} + \frac{2}{3} J_{2n} \doteq x \doteq \frac{4}{3} i_{2n} - \frac{1}{3} i_n,$$

so fragt Gregory, wie vorher Nikolaus von Cusa, wo denn genauer x zwischen diesen Grenzen liegt, und findet die Antwort: man schalte zwischen diesen beiden Grenzen vier arithmetische Mittel ein, das größte[2]) ist nahezu x; ebenso nimmt Huygens[3]) das kleinste zwischen $\frac{1}{3}(i_n + 2J_n)$ und $\frac{1}{3}(4i_{2n} - i_n)$ also:

$$x \doteq \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3} i_n + \frac{2}{3} J_n\right) + \frac{4}{5}\left(\frac{4}{3} i_{2n} - \frac{1}{3} i_n\right),$$

oder geometrisch ausgedrückt: $x \doteq \frac{-3\sin x\cos x + 16\sin x + 2\operatorname{tg} x}{15}$. Auch diese Formel hat Gregory (s. S. 194 vorletzte Formel).



Für den Fall $n=1$ und Anwendung auf *Segmente* gibt die Formel, da $i_n = AB = 0$, $J_n = \Delta ADB$, $i_{2n} = \Delta ACB$ ist, Segment ACB:

$$\doteq \frac{1}{15} H \cdot AB + \frac{8}{15} h \cdot AB = AB \cdot \frac{8h + H}{15},$$

wenn $H = DE$, $h = CE$ ist.[4])

Anmerkung: Wir haben früher mit $2x$ den Bogen $\widehat{ACB}$ oder,

1) Vera circ. et hyp. quadr., prop. XX (Huygens Opera I p. 438).

2) l. c. p. 444.

3) Huygens, der den Miterfinder des Spiegelteleskops scharf kritisiert (Opera varia, Lugd. Bat. 1724, I, p. 474), glaubt ihm hier einen Fehler vorwerfen zu können, da er die andere Wahl der oberen Grenze bei Gregory übersieht. Vgl. auch Heinrich, Bibl. math. (3) 1 (1900), p. 90.

4) Diese Formel von C. W. Baur (Schlöm. Ztschr. 12 (1867), p. 355) ist also in der obigen enthalten; ebenso eine von Mollweide (s. S. 205).

was dasselbe ist, den *Sektor* AOB bezeichnet; aber solche Formeln wie die des Snellius

$$x \doteq \frac{1}{3} i_n + \frac{2}{3} J_n$$

oder die von Gregory

$$x \doteq \frac{4}{3} i_{2n} - \frac{1}{3} i_n$$

gelten offenbar auch, wenn man statt der Sektoren die *Segmente* nimmt, da dann beiderseits nur das Dreieck AOB wegfällt; dann bedeuten natürlich i_n, J_n usw. die *Segmente* der Polygonzüge. Diese Formeln gelten dann auch für beliebige kleine Bogen, da man sie durch Kreisbogen approximieren kann (s. u.). Von den arithmetischen Mitteln geht man dann (s. o.) zu den harmonischen und geometrischen Mitteln über, die also auch für Segmente und auch allgemein gelten.

Gregory fügt zu diesen Formeln aber noch eine ganze Reihe analoger[1]) hinzu, und zwar gleich ganz allgemein für eine nach dem Archimedischen Algorithmus (s. o.) gebildete Größenreihe A, B, C, D, E, ... Ist Z der Wert, gegen den die Reihe konvergiert, so gibt Gregory Formeln der Art:

$$Z \doteq \frac{-3A + 2B + 16C}{15} \quad (\text{bzw.} \doteq \text{s. u.}),$$

$$Z \doteq \frac{A - 2B + 16D}{15},$$

$$Z \doteq \frac{-A + 8C + 8D}{15},$$

$$Z \doteq \frac{-B + 4C + 12D}{15},$$

$$Z \doteq \frac{-5A - 2B + 48C + 64D}{105} \quad \text{usw.}$$

bis zu neungliedrigen Formeln; und insbesondere noch für $A = \sin x$, $B = \operatorname{tg} x$, $C = 2 \sin \frac{x}{2}$, $D = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, ... Formeln, wie:

$$x \doteq \frac{-22A + B + 96C}{75},$$

$$x \doteq \frac{-3A + 16C + 2D}{15},$$

$$x \doteq \frac{-56A - B + 320C + 52D}{315} \quad \text{usw.}$$

Die angegebenen Zeichen gelten in den obigen Formeln, wenn bei $A > B$ die Größe C das harmonische, oder bei $A < B$ die Größe

1) Exercitationes geometricae, London 1668, prop. XXI, p. 1. Appendicula ad veram Circuli et Hyperbolae quadraturam.

C das geometrische Mittel aus A und B ist; das findet bei Ellipsensektoren, das Umgekehrte bei Hyperbelsektoren statt, so daß für diesen Fall die Zeichen $\overset{\cdot}{=}$ und $\underset{\cdot}{=}$ zu vertauschen sind.

Die Herleitung dieser Formeln verheimlicht er ausdrücklich. Er versichert, daß er solche Näherungsformeln auch bei beliebigen konvergenten Reihen aufstellen könne.

Nach der obigen Bemerkung kann man in allen diesen Formeln, statt der arithmetischen Mittel auch die harmonischen oder die geometrischen nehmen.

Christian Huygens (1629—1695).[1]

Die Formeln des Nikolaus von Cusa, Snellius und Orontius Finäus wurden erst von Huygens in seiner Schrift: „De circuli magnitudine inventa" berichtigt und streng bewiesen, auch fügt Huygens noch einige weitere Formeln hinzu.

Zum Beweis der Snelliusschen Formel beweist Huygens zunächst den folgenden Hilfssatz: „Beschreibt man einem Kreissegment das gleichschenklige Dreieck ABC ein und den durch die beiden Sehnen AB und BC abgeschnittenen Segmenten in derselben Weise zwei gleichschenklige Dreiecke: AEB und BFC, so ist der Inhalt des ersten Dreiecks kleiner als das Vierfache der Summe der beiden andern Dreiecke."

Zunächst ist:

$$EA = EB > \frac{1}{2} AB,$$

also:

$$AB^2 < 4BE^2,$$

oder da $AB^2 = 2BD$ und $BE^2 = 2BG$ ist:

$$BD < 4BG.$$

Ferner ist:

$$EF = AB = BC,$$

also:

$$2EF = AB + BC > AC.$$

Folglich:

$$\Delta ABC < 8 \Delta EBF,$$

oder:

$$\Delta ABC < 4(\Delta AEB + \Delta BFC). \qquad (1)$$

Aus diesem Satze zieht jetzt Huygens folgenden Schluß: Denkt

1) De circuli magnitudine inventa, Lugd. Bat. 1654. S. ferner die Korrespondenz (spez. Nr. 181—192) von Huygens mit F. van Schooten, Grégoire de St. Vincent u. a. Oeuvres (La Haye 1888/90) I.

man sich in die durch die Sehnen AE, EB, BF und FC abgeschnittenen Segmente wiederum in derselben Weise gleichschenklige Dreiecke einbeschrieben, in die dann übrigbleibenden abermals usw., so erhält man:

$$\text{Segm } ABC = \Delta ABC + 2\Delta AEB + 4\Delta \cdots + \cdots$$
$$> ABC\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right),$$

also:

$$\text{Segm } ABC > \frac{4}{3} ABC.\text{[1]} \qquad (2)$$

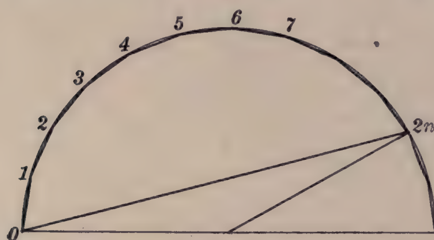
Demnach auch:

$$\text{Sektor } ABCO > \frac{4}{3} ABC + AOC. \qquad (2a)$$

Vom Dreieck geht nun Huygens zum einbeschriebenen n-Eck über und beweist den Satz: „Das Kreissegment ist größer als $\frac{4}{3}$ eines ihm einbeschriebenen $2n$-Ecks vermindert um $\frac{1}{3}$ des zugehörigen einbeschriebenen n-Ecks."

Beweis: Der Inhalt des Polygons $0\ 1\ 2 \ldots 2n$ werde mit i_{2n}, der des Polygons $0\ 2 \ldots 2n$ mit i_n bezeichnet; dann ist:

$$\text{Segm }(02) + \text{Segm }(24) + \cdots + \text{Segm }(2n-2, 2n) = \text{Segm }(0,2n) - i_n$$



nach (2):

$$> \frac{4}{3}\left[\Delta(012) + \Delta(234) + \cdots\right]$$
$$> \frac{4}{3}(i_{2n} - i_n).$$

Folglich:

$$\text{Segm }(0,2n) > \frac{4}{3} i_{2n} - \frac{1}{3} i_n.\text{[2]}$$

Dieselbe Formel gilt natürlich, wie schon oben bemerkt, auch für die zugehörigen Sektoren. Setzt man ferner $2n$ für n und den *Sektor*

---

1) Diesen Satz beweist ganz ebenso schon Heron, s. dessen Metrica Prop. XXXII, ed. H. Schöne (Leipzig 1903), p. 76/77; Heron gibt (Prop. XXX, XXXI) als ältere ungenauere Regeln an:

$$\text{Segment} = \frac{1}{2} BD(AC + BD) \quad \text{und} \quad = \frac{1}{2} BD(AC + BD) + \frac{1}{14} AD^2.$$

Heron erwähnt, daß die Formel: $\text{Segm} = \frac{2}{3} \cdot \text{Basis} \cdot \text{Höhe}$ nach Archimedes für das Parabelsegment *genau* gelte. Sollte ihre Anwendung als Approximation für Kreissegmente nicht auch Archimedisch sein und vielleicht der bisher nicht aufgeklärten zweiten Archimedischen Kreisrechnung (s. o.) zugrunde liegen?

2) Diese Formel hatte, wie wir sahen, auch schon J. Gregory (l. c. prop. XX), s. G. Heinrich, Bibl. math. (3) 2 (1901), p. 77.

$i_{4n} = \frac{1}{2} u_{2n}$, den Sektor $i_{2n} = \frac{1}{2} u_n$, den Kreissektor $= \frac{1}{2}$ Bogen, so erhält man

$$\text{Bogen} > \frac{4}{3} u_{2n} - \frac{1}{3} u_n. \tag{3a}$$

Analoge Betrachtungen stellt Huygens für umbeschriebene Polygonzüge an. Da beweist er zunächst den Satz: „Ein Kreissegment ist kleiner als zwei Drittel des Dreiecks, welches die Sehne des Segments zur Basis hat und dessen Schenkel das Segment berühren.“

Zum Beweise ziehe man in nebenstehender Figur noch die Linie FG, welche das Segment in dem Scheitel berührt; dann ergeben sich folgende Ungleichungen:

$$EF > FB \quad \text{oder} \quad > AF,$$

also:

$$2EF > AE > 2FA.$$

Hieraus:

$$\Delta FEG > \frac{1}{4} AEC$$

und

$$\Delta ABC < \frac{1}{2} AEC,$$

also:

$$\Delta FEG > \frac{1}{2} ABC,$$

ebenso:

$$\Delta HFK > \frac{1}{2} \Delta AJB \quad \text{usw.}$$

Folglich, durch Summierung aller dieser Ungleichungen:

$$\Delta AEC - \text{Segm } ABC > \frac{1}{2} \text{Segm } ABC,$$

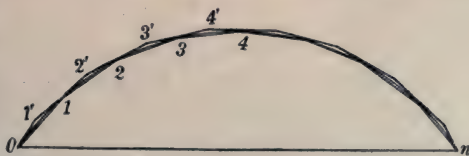
d. h.:

$$\text{Segm } ABC < \frac{2}{3} AEC \tag{4}$$

also auch:

$$\text{Sektor } ABCO < \frac{2}{3} AEC + ACO. \tag{4a}$$

Nunmehr geht Huygens vom Dreieck wieder zum n-Eck über, indem er sich den Kreisbogen in n gleiche Teile geteilt denkt, und auf jeden einzelnen Teilbogen den eben bewiesenen Satz anwendet. Bezeichnet man den Inhalt des Sehnenpolygons



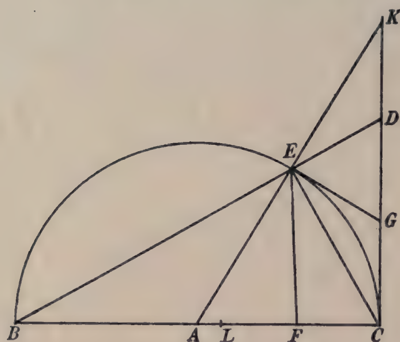
$0123 \ldots n$ mit i_n, den des Tangentenpolygons $01'2'3' \ldots n'n$ mit J_n, so ist:

$$\text{Segm}\,\widehat{0n} - i_n = \text{Segm}\,\widehat{01} + \text{Segm}\,\widehat{12} + \cdots$$
$$< \frac{2}{3}\{\Delta(01'1) + \Delta(12'2) + \cdots\}$$
$$< \frac{2}{3}(J_n - i_n),$$

also:

$$\text{Segm} < \frac{2}{3} J_n + \frac{1}{3} i_n. \tag{5}$$

Eine weitere Ungleichung erhält Huygens aus der nebenstehenden Figur, wo CD die Tangente im Punkte C bedeutet. Es ist:



$$EG = GC = DG,$$

weil $\sphericalangle DEC = 1\,R$ ist; ferner ist wegen (4a):

$$\text{Sektor } AEC < \Delta AEC + \frac{2}{3}\Delta EGC$$
$$< \frac{2}{3} AEGC + \frac{1}{3} EAC,$$

also:

$$\frac{1}{2}\widehat{EC} < \frac{2}{3} CG + \frac{1}{3}\,\frac{1}{2} EF,$$

oder:

$$\widehat{EC} < \frac{2}{3} CD + \frac{1}{3} EF. \tag{6}$$

Verlängert man in der Figur noch AE bis zum Schnittpunkt K mit CD und konstruiert den Punkt L so, daß $LF = FC$, also:

$$BL = 2AF$$

ist, so wird, da das geometrische Mittel kleiner ist als das arithmetische[1]):

$$BC : BF < BF : BL,$$

also:

$$BC : BL = AC : AF = \frac{BC}{BF} \cdot \frac{BF}{BL} > \frac{BC^2}{BF^2},$$

also auch:

$$KC : EF > \frac{DC^2}{EF^2},$$

oder:

$$KC : DC > DC : EF,$$

folglich:

$$KC + EF > 2DC,$$

also:

$$\frac{1}{3} KC + \frac{2}{3} EF > \frac{2}{3} DC + \frac{1}{3} EF.$$

1) S. z. B. Euklid V, 25.

Also wegen (6):

$$\text{Bogen } \widehat{EC} < \frac{1}{3} KC + \frac{2}{3} EF, \tag{7}$$

welches die Snelliussche Formel ist.

Daraus folgt allgemeiner durch Anwendung auf die n^{ten} Teile eines Bogens und Addition:

$$\text{Bogen} < \frac{1}{3} U_n + \frac{2}{3} u_n. \tag{7a}$$

Diese Formel für $n = 12$ und (3a) für $n = 6$ liefern Huygens die π-Grenzen:

$$3{,}1411 \ldots \text{ und } 3{,}1423 \ldots,$$

für die Archimedes die 96-Ecke brauchte. Ebenso Formel (7a) für $n = 60$, (3a) für $n = 30$, die Grenzen:

$$3{,}1415917 \ldots \text{ und } 3{,}141594 \ldots$$

und für $n = 10800$ bzw. 5400 die Grenzen:

$$3{,}141592653589792 \ldots \text{ und } 3{,}141592653589794 \ldots,$$

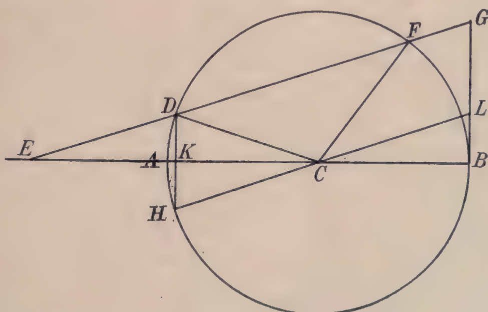
während Ludolf hieraus nur:

$$3{,}1415726 \ldots \text{ und } 3{,}1415927 \ldots$$

gefunden hatte.

Zum Beweis der Formel des Nikolaus von Cusa knüpft Huygens an die Trisektionsfigur an. Zieht man in derselben noch durch den Mittelpunkt C die Parallele HL zu EDF, so ist:

$$BG = GL + LB$$
$$= 2DK + LB.$$



Nun ist nach (7):

$$\frac{2}{3} DK + \frac{1}{3} LB > \widehat{AH},$$

und da $\widehat{AH} = \frac{1}{3} \widehat{FB}$ ist:

$$2DK + LB > \widehat{FB},$$

folglich:

$$BG > \widehat{BF}. \tag{8}$$

Ferner sei in der folgenden Figur:

$$AC = AO = 1 \quad \text{und} \quad AH = AE.$$

Dann ist:

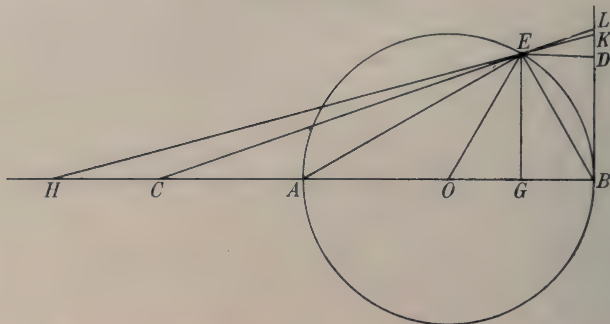
$$\sphericalangle AHE = \sphericalangle HEA,$$
$$\sphericalangle HEA + \sphericalangle KEB = 1\,R,$$
$$\sphericalangle AHE + \sphericalangle HKB = 1\,R,$$

infolgedessen:

$$\sphericalangle HKB = \sphericalangle KEB,$$

also:

$$EB = KB.$$



Ferner ist

$$BD = EG,$$

also:

$$DK = BK - BD = BE - EG.$$

Aus

$$AG : AE = AE : AB.$$

folgt:

$$AE \text{ oder } AH < \frac{1}{2}(AG + AB),$$

$$CH < \frac{1}{2} AG < AC,$$

also:

$$3CH < CG.$$

Endlich gelten die Proportionen:

$$HG : GE = ED : DK,$$

$$\underline{GE : GC = LD : DE}$$

daraus:

$$HG : GC = LD : DK,$$

und:

$$GC : HG - GC = DK : LD - DK,$$

also:

$$GC : HC = DK : LK,$$

daraus folgt, da ja $3HC < CG$ gilt, daß auch:

$$3KL < DK$$

ist, oder, da wir oben $DK = BE - EG$ fanden:

$$KL < \frac{1}{3} BE - \frac{1}{3} EG,$$

oder, wenn man $BK = EB$ addiert:

$$BL < \frac{4}{3} BE - \frac{1}{3} EG;$$

folglich nach (3b):

$$\widehat{BE} > BL. \tag{9}$$

Das ist die Formel des Nikolaus von Cusa.

Endlich beweist Huygens auch noch die Formel des Orontius Finäus.

Es sei in nebenstehender Figur

$$CF = CE \text{ und } CR : CF = CF : CG,$$

dann ist, wenn $CE = s_{2n}$ ist:

$$CG = S_{2n};$$

also gilt nach (7a), wenn zur Abkürzung:

$$\frac{2}{3} CF + \frac{1}{3} CG = \Sigma$$

gesetzt wird:

$$\Sigma > \widehat{CE}.$$

Aus

$$CR : CF = CF : CG$$

folgt ferner:

$$2CR + CF : 3CR = 2CF + CG : 3CF,$$

d. h.:

$$BC + CF : BC + CR = \frac{2}{3} CF + \frac{1}{3} CG : CF = \Sigma : CF.$$

Andererseits ist:

$$BR : BF > 1 > BC + CF : BC + CR > (BC + CF)^3 : (BC + CR)^3,$$

also:

$$BR^3 : BR^2 \cdot BF > \Sigma^3 : CF^3.$$

Ferner folgt aus:

$$FG > FR$$

und

$$FC > FB$$

$$FC : FR > FB : FG,$$

also:

$$FC : FC - FR < FB : FG - FB,$$

$$FC : CR < FB : BG,$$

$$FC : FB < CR : BG,$$

$$< BR^2 : BR \cdot BG,$$

d. h.:

$$FC \cdot BR \cdot BG < FB \cdot BR^2;$$

also gilt auch:

$$BR^3 : FC \cdot BR \cdot BG > \Sigma^3 : CF^3,$$

$$BR^3 : \Sigma^3 > BR \cdot BG : CF^2,$$

$$> BR \cdot BG : CR \cdot CG,$$

$$BR^3 : \Sigma^3 > BG : GC.$$

Weiterhin folgt:

$$CR : CG = CR^2 : CF^2 = CR^2 : CE^2,$$
$$= ER \cdot RP : ER \cdot EP = RP : EP,$$

also:

$$BC : CG = 2CR : CG = 2PR : PE = PR : PA,$$
$$BC - CG : GC = PR - PA : PA,$$
$$BG : GC = AR : PA = AR : AE = RC : EK.$$

Setzt man dies in die Ungleichung: $BR^3 : \Sigma^3 > BG : GC$ ein, so geht sie über in:

$$CR^3 : \Sigma^3 > RC : EK;$$

daraus folgt, da ja $\Sigma > \widehat{EC}$ war:

$$\widehat{EC}^3 < RC^2 \cdot EK. \tag{10}$$

Das ist die Formel des Orontius Finäus.

Huygens hat durch ähnliche Betrachtungen wie die obigen noch bessere Approximierungen gefunden, nämlich:

$$\text{Bogen} \doteq u_{2n} + \frac{4u_{2n} + u_n}{2u_{2n} + 3u_n} \cdot \frac{u_{2n} - u_n}{3}$$

und

$$\text{Bogen} \doteq u_{2n} + \frac{10}{3} \cdot \frac{u_{2n}^2 - u_n^2}{\frac{8}{9} \cdot \frac{(u_{2n} - u_n)^2}{2u_{2n} + 3u_n} + (2u_{2n} + 3u_n)}.$$

Mit diesen Formeln gewinnt Huygens aus u_3 und u_6 für π die Grenzen 3,14181 ... und 3,14135 ..., und aus u_{30} und u_{60} die Grenzen 3,1415926538 ... und 3,1415926533 ....

Überhaupt ist die Anzahl der richtigen Stellen, die das n-Eck und das $2n$-Eck liefern, etwa $6 \log n$, also dreimal so groß, wie bei den Formeln von Snellius und Nikolaus von Cusa; oder die Huygensschen Formeln liefern durch das n-Eck so genaue Grenzen wie das Archimedische Verfahren durch die n^3-Ecke. Dasselbe gilt von den dreigliedrigen und das Entsprechende von den mehrgliedrigen Formeln Gregorys (s. o.), die überdies den rechnerischen Vorzug haben linear zu sein.

Die beiden letzten Huygensschen Formeln sind offenbar Approximationen von $\frac{x}{\sin x}$ durch Formeln der Art:

$$\frac{x}{\sin x} \doteq \frac{a + b\cos x + c\cos^2 x}{e + f\cos x}$$

und

$$\frac{x}{\sin x} \doteq \frac{a + b\cos x + c\cos^2 x + d\cos^3 x}{e + f\cos x + g\cos^2 x},$$

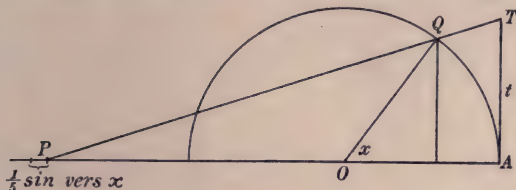
aber es sind, wie sich zeigen läßt, nicht die besten Formeln dieser Art.

Newton (1643—1727) **und Lambert** (1728—1777).

Nach Erfindung der Potenzreihen für $\sin x$ und $\cos x$ war es für Newton [1]) natürlich leicht, die Formel:

$$\frac{x}{\sin x} \doteq \frac{14 + \cos x}{9 + 6 \cos x}$$

zu finden; diese auch von Lambert [2]) bewiesene Formel ist die beste Approximation von $\frac{x}{\sin x}$ durch eine lineare *gebrochene* Funktion von $\cos x$. Lambert leitet daraus folgende Näherungsrektifikation her: Man verschiebe den Snelliusschen Rektifikationspunkt um $\frac{1}{5}$ sin vers x nach dem Mittelpunkt des Kreises hin, so ergibt sich die Proportion:



$$t : \left(3 - \frac{1}{5} \operatorname{sin vers} x\right) = \sin x : 3 - \frac{6}{5} \operatorname{sin vers} x.$$

Folglich:

$$\frac{t}{\sin x} = \frac{15 - (1 - \cos x)}{15 - 6(1 - \cos x)} = \frac{14 + \cos x}{9 + 6 \cos x},$$

d. h.:

$$t \doteq x.$$

Nach E. Lampe [3]) gibt die Newtonsche Formel x bis zu den Winkeln von 45^0 höchstens mit einem Fehler von 19′,5. [4])

Die Formeln:

$$\frac{\sin x}{x} \doteq \frac{2 + \cos x}{3} \quad \text{(Nikolaus von Cusa)},$$

$$\frac{\sin x}{x} \doteq \frac{9 + 6 \cos x}{14 + \cos x} \quad \text{(Newton)}$$

sind, wie wir sehen werden, die beiden ersten Näherungswerte einer Kettenbruchentwicklung von $\frac{\sin x}{x}$, deren dritter ist:

$$\frac{\sin x}{x} \doteq \frac{51 + 48 \cos x + 6 \cos^2 x}{80 + 25 \cos x}.$$

1) Opera ed. Horsley I, p. 323. Brief Newtons an Leibniz vom 13. Juni 1676.

2) Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung. Berlin 1765, II, p. 312.

3) Mathesis 2, S. VII, 9—10, 1897, p. 129, 153.

4) S. auch Wilh. Voll, Versuch, die Länge eines Kreisbogens ohne Hilfe einer Sinus- oder Sehnentafel zu bestimmen. Berlin 1824.

Berechnet man für $t = x\ OP$ aus der Proportion:

$$OP + 1 : x = OP + \cos x : \sin x,$$

so findet man:

$$OP = 2 - \frac{1}{5} \sin \operatorname{vers} x - \frac{6}{175} \sin \operatorname{vers}^2 x - \cdots;$$

daraus leitet Newton[1]) folgende Rektifikation des Bogens x her:

Man konstruiere y aus der Proportion

$$7 : \frac{3}{5} \sin \operatorname{vers} x = \frac{2}{5} \sin \operatorname{vers} x : y$$

und nehme

$$OP = 2 - \frac{1}{5} \sin \operatorname{vers} x - y;$$

der so bestimmte Punkt P ist der nächst beste Rektifikationspunkt. Noch genauer, nämlich dem oben erwähnten dritten Näherungswert entsprechend, hätte man y aus

$$7 - \frac{6}{5} \sin \operatorname{vers} x : \frac{3}{5} \sin \operatorname{vers} x = \frac{2}{5} \sin \operatorname{vers} x : y$$

zu konstruieren. Lambert[2]) entwickelte OP nach Potenzen von x:

$$OP = 2 - \frac{1}{10} x^2 - \frac{1}{42000} x^4 + \frac{1}{126000} x^6 + \cdots,$$

also ist in zweiter Annäherung

$$OP = 2 - \frac{1}{10} x^2,$$

was man zur Arkufikation einer Strecke x benutzen kann.[3])

Goniometrie kleiner Winkel.

Zu den Formeln:

$$\frac{\sin x}{x} \doteq \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos x \quad \text{(Nikolaus von Cusa)};$$

$$\frac{x}{\sin x} \doteq \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{1}{\cos x} \quad \text{(Snellius)},$$

$$\frac{x}{\sin x} \doteq \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{3} \cos x \quad \text{(Huygens)},$$

$$\frac{x}{\sin x} \doteq \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cos x \quad \text{(Huygens)}$$

kann man noch hinzufügen:

$$\frac{\sin x}{x} \doteq \frac{2}{3} \cos x + \frac{1}{3} \frac{1}{\cos x},$$

$$\frac{\sin x}{x} \doteq \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\cos x},$$

---

1) J. B. Biot et F. Lefort, Commercium epistolicum (Paris 1856), p. 110.

2) Observationes variae in mathesin puram. Acta Helvetica III, Basileae 1758, § 10, p. 132.

3) Vgl. z. B. Fr. Strempel, Progr. Rostock 1898.

die den beiden Huygensschen Formeln analog sind, nur, daß die arithmetischen durch die harmonischen Mittel ersetzt sind. Von Formeln, die x näherungsweise durch goniometrische Funktionen von x ausdrücken, sind später noch eine ganze Reihe aufgestellt worden; insbesondere in der Geodäsie und Astronomie, wo eine Art *Goniometrie kleiner Winkel* erforderlich wird. So gibt Mollweide[1]) die Formel:

$$\frac{x}{\sin x} \doteq \frac{16 - 3\cos x + 2\sec x}{15},$$

die unter den Gregoryschen enthalten ist (s. S. 194, vorletzte Formel); man kann ihr wieder die analoge zur Seite stellen:

$$\frac{\sin x}{x} \doteq \frac{32 + 14\cos x - \sec x}{45}.$$

Mit diesen acht Formeln sind alle diejenigen erschöpft, durch welche $\frac{x}{\sin x}$ oder $\frac{\sin x}{x}$ für kleine x durch eine lineare Funktion von $\cos x$ und $\sec x$ approximiert wird.

Von dreigliedrigen Formeln, die also einer Approximation eines Bogens durch *drei* Polygone entsprechen, findet sich bei Lambert[2]) noch:

$$x = \frac{1}{6}\operatorname{tg} x + \frac{13}{24}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 4x,$$

die ebenfalls unter den Gregoryschen enthalten ist.

Die Formel von Orontius Finäus:

$$x \doteq \sqrt[3]{\sin^2 x \cdot \operatorname{tg} x}$$

ist heute als die *Maskelyne*sche bekannt.[3]) Sie wird benutzt bei logarithmischen Rechnungen, wenn kleine Winkel vorkommen. Sie findet sich auch *nach* Maskelyne wieder in verschiedenen Formen, ohne daß die Übereinstimmung mit der alten Formel von Orontius erkannt wurde, z. B. bei *Wolfers*[4]), der das erste Korrekturglied hinzufügt:

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \sec^{\frac{2}{3}} x + \frac{x^4}{45}.$$

---

1) Zachs monatl. Corr. 16 (1807), p. 18.

2) l. c. p. 273.

3) Nevil Maskelyne (1732—1811) teilt sie mit in der Einleitung seiner Ausgabe der Tables of Logarithmes von Michael Taylor, London 1792, Probl. II, p. 21/22. Begründet (durch Reihenentwicklungen) wurde sie erst durch Tralles, Abh. d. Berl. Ak. 1804—1811, p. 17. — Auf dieser Formel beruht das Rechnen mit den Zahlen

$$S = \frac{1}{3}\lg\cos x, \qquad T = -\frac{2}{3}\lg\cos x$$

für kleine Winkel.

4) Arch. d. Math. 30 (1858), p. 339; vgl. auch Matzka, ib. 13 (1849), p. 138.

Zu anderen Kategorien gehören z. B. die Formeln:

$$x \doteq \frac{3 \operatorname{tg} x}{3 + \operatorname{tg}^2 x}\ ^{1)},$$

die als Anfang der Kettenbruchentwicklung

$$x = \cfrac{\operatorname{tg} x}{1 + \cfrac{\frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 x}{1 + \cfrac{\frac{4}{15} \operatorname{tg}^2 x}{1 + \cdots}}}$$

anzusehen ist, ferner:

$$\cos x = \left(1 - \frac{x^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{15}\right)^{\frac{5}{2}},$$

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \left(1 - \frac{7x^2}{15}\right)^{-\frac{5}{7}},$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6}\left(1 - \frac{x^2}{420}\right)^{21}, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{60}\right)^{5},$$

deren drei letzte von *Hill*[2]) herrühren.

Auch *Gauss*[3]) hat eine ähnliche, sehr genaue Formel:

$$\frac{x - \sin x}{\frac{4}{3} \sin^3 \frac{x}{2}} = \frac{1 + \frac{2}{35} \sin^2 \frac{x}{4}}{1 - \frac{8}{7} \sin^2 \frac{x}{4}};$$

bis zu $x = 26^0 54'$ ist der Fehler in der siebenten Stelle der Logarithmen gleich 0, bis $x = 40^0$ ist er höchstens 2, bis 45^0 erst 11.[4])

Kapitel III.

Mechanische[5]) Quadratur und Rektifikation.

Kreisbogen, -sektoren und -segmente.

Aber die Bedeutung der Huygensschen Formeln liegt weniger in dieser *Goniometrie kleiner Winkel* als darin, daß durch dieselben

1) Olbers in Zachs monatl. Korr. 16 (1807), p. 539.

2) Arch. d. Math. 1 (1841), p. 191. Dort noch einige weitere Formeln.

3) Gauss, Werke VII, p. 299; noch genauere Formeln derart s. VIII, p. 128.

4) Ähnliche Formeln gaben F. Giudice (Periodica di Mat. da Besso, Roma 1888, III, p. 1), E. Lampe (Mathesis (2) 7 p. 129, 153, 183).

5) Das Wort „mechanisch" wird in dieser Verbindung in einer sonst nicht mehr üblichen Bedeutung gebraucht, nämlich in der Bedeutung „approximativ". So unterscheiden die älteren Mathematiker (z. B. Huygens, Vieta, Dürer) Näherungskonstruktionen als „mechanice" von den genauen, die als „demonstrative" bezeichnet werden.

eine näherungsweise *Rektifikation und Quadratur von Kreisbogen und -segmenten*, aber auch, wie wir sehen werden, von beliebigen Bogen und zugehörigen Segmenten geliefert wird.

Wir wollen die allgemeinsten Formeln dieser Art zunächst für den Kreis herleiten, und zwar für den Fall, daß man nur zwei Polygone benutzt.

Verwendet man die Reihenentwicklungen, die wir später (sechster Teil, Kapitel IV) ableiten werden:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots,$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \cdots,$$

und die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} u_n &= 2n \sin \frac{x}{2n}, \\ U_n &= 2n \operatorname{tg} \frac{x}{2n}, \\ i_n &= \frac{n}{2} \sin \frac{x}{n}, \\ J_n &= n \operatorname{tg} \frac{x}{2n}, \end{aligned}\right\}$$

wo u_n, U_n, i_n, J_n Umfänge und Sektoren-Inhalte von regulären, dem Kreisbogen x vom Radius Eins ein- bzw. umbeschriebenen Polygonzügen sind,

so findet man leicht die folgenden Approximationen für den Bogen x:

$$\frac{m^2 U_m + 2n^2 u_n}{m^2 + 2n^2},$$

$$\frac{m^2 u_m - n^2 u_n}{m^2 - n^2},$$

$$\frac{m^2 U_m - n^2 U_n}{m^2 - n^2}$$

und für den Sektor bzw. das Segment:

$$\frac{2m^2 J_m + n^2 i_n}{2m^2 + n^2},$$

$$\frac{m^2 i_m - n^2 i_n}{m^2 - n^2},$$

$$\frac{m^2 J_m - n^2 J_n}{m^2 - n^2},$$

und zwar geben gleichartige Polygone (beide ein- oder beide umbeschrieben) untere, ungleichartige (das eine ein-, das andere umbeschrieben) obere Näherungswerte. Es handelt sich also stets um arithmetische Mittel, in denen jedes Polygon ein dem Quadrat seiner Seitenzahl proportionales Gewicht bekommt, und überdies bei ungleichartigen Polygonen für den *Umfang* die *ein*beschriebenen, für den *Inhalt* die *um*beschriebenen doppelt ins Gewicht fallen.

Analoge Formeln lassen sich bei Verwendung von mehr als zwei Polygonen aufstellen. Andererseits lassen diese Formeln eine Verallgemeinerung in der Weise zu, daß das arithmetische Mittel durch das harmonische oder geometrische Mittel ersetzt wird, noch allgemeiner durch das r^{te} Potenzmittel. Für die direkte Berechnung ist das arithmetische, für die logarithmische Rechnung das geometrische Mittel das bequemste, aber eines der anderen Mittel kann eine bessere Approximation liefern; so erhält man z. B. für den Umfang für $m = n$ aus dem allgemeinen Potenzmittel:

$$\sqrt[r]{\frac{2u^r + U^r}{3}}$$

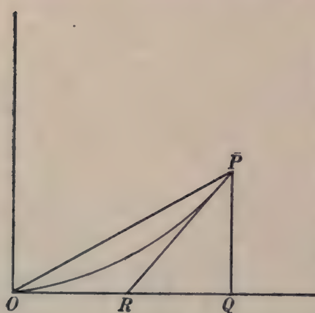
eine schärfere Approximation bei Kreis*bogen* für $r = -\frac{4}{5}$; dieser Wert ist zugleich die Grenze zwischen denjenigen Mitteln, welche eine Annäherung von unten $\left(r < -\frac{4}{5}\right)$ und denjenigen, welche eine Annäherung von oben $\left(r > -\frac{4}{5}\right)$ ergeben. Ebenso liefert für den Inhalt eines Kreis*sektors* bzw. *-segments*:

$$\sqrt[r]{\frac{2J^r + i^r}{3}}$$

die beste Annäherung für $r = -\frac{1}{5}$; und die Mittel für $r < -\frac{1}{5}$ liefern untere, diejenigen für $r > -\frac{1}{5}$ obere Näherungswerte.

Beliebige Kurven.

Wie schon erwähnt reichen diese Formeln über die bloße Kreismessung hinaus, sie gelten vielmehr für beliebige Kurven.



Es sei nämlich $\widehat{OP}$ ein Bogen einer beliebigen Kurve. Man wähle O zum Anfangspunkte und die Tangente in O zur x-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems; dann hat die Gleichung der Kurve folgende Form:

$$y = ax^2 + bx^3 + cx^4 + \cdots.$$

Zu P konstruieren wir die zugehörige Ordinate PQ und die Tangente PR. Der Flächeninhalt des von dem Kurvenbogen $\widehat{OP}$, der Ordinate PQ und der Abszisse OQ eingeschlossenen Stückes wird:

$$\widehat{OP}Q = \int_0^x y\,dx = \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{4}x^4 + \frac{c}{5}x^5 + \cdots;$$

ferner ist:

$$\Delta\, OPQ = \frac{xy}{2} = \frac{a}{2}\,x^3 + \frac{b}{2}\,x^4 + \frac{c}{2}\,x^5 + \cdots,$$

also:

$$\text{Segm } \widehat{OP} = \frac{a}{6}\,x^3 + \frac{b}{4}\,x^4 + \frac{3c}{10}\,x^5 + \cdots.$$

Die Gleichung der Tangente PR:

$$Y - y = (2ax + 3bx^2 + 4cx^3 \cdots)(X - x)$$

gibt für R die Koordinaten:

$$Y = 0, \quad X = x - \frac{ax^2 + bx^3 + cx^4 + \cdots}{2ax + 3bx^2 + 4cx^3 + \cdots};$$

infolgedessen ist:

$$\Delta\, OPR = \frac{1}{2}\,y\left(x - \frac{ax^2 + bx^3 + cx^4 + \cdots}{2ax + 3bx^2 + 4cx^3 + \cdots}\right)$$

$$= \frac{a}{4}\,x^3 + \frac{3b}{8}\,x^4 + \left(\frac{c}{2} - \frac{b^2}{16a}\right)x^5 + \cdots,$$

also:

$$\text{Segm } \widehat{OP} = \frac{2}{3}\,\Delta\, OPR + \left(-\frac{c}{30} + \frac{b^2}{24a}\right)x^5 + \cdots$$

$$\doteq \frac{2}{3}\,OPR \quad \text{(Lambert).[1]}$$

Also auch (s. die folgende Figur):

$$\text{Segm } \widehat{OPP'} \doteq \frac{2}{3}\,OPR + \frac{2}{3}\,PP'R' + OPP',$$

also:

$$\doteq \frac{2}{3}\,ORR'P' + \frac{1}{3}\,OPP'$$

und

$$\text{Segm } \widehat{OPP'P''} \doteq \frac{2}{3}\,ORR'P' + \frac{1}{3}\,OPP' + \frac{2}{3}\,P'R''P'' + OP'P'',$$

also:

$$\doteq \frac{2}{3}\,ORR'R''P'' + \frac{1}{3}\,OPP'P'' \text{ usw.,}$$

d. h. allgemein:

$$\text{Segm } \widehat{O \ldots P^{(n)}} \doteq \frac{2}{3}\,J_n + \frac{1}{3}\,i_n.$$

1) Beyträge II, p. 272. Der Fehler beträgt z. B. bei einer Totalkrümmung von 20° nur 0,0000053; s. Lambert l. c., p. 274. Für die *Parabel* ist

$$b = c = \cdots = 0,$$

also die Formel genau richtig, wie bekanntltch schon von Archimedes gefunden. Sein Beweis ist genau derselbe wie der später von Heron und Huygens bei *Kreissegmenten* angewandte, nur daß hier Ungleichungen an die Stelle von Gleichungen treten.

Eine analoge Formel kann man für die Rektifikation ableiten. Aus $y = ax^2 + bx^3 + cx^4 + \cdots$ folgt zunächst:

$$y' = 2ax + 3bx^2 + 4cx^3 + \cdots,$$

also:

$$\widehat{OP} = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2}\, dx = x + \frac{2}{3} a^2 x^3 + \frac{3}{2} abx^4 + \left(\frac{8}{5}ac + \frac{9}{10} b^2 - \frac{2}{5} a^4\right) x^5 + \cdots.$$

Ferner wird:

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2} = x + \frac{1}{2} a^2 x^3 + abx^4 + \left(ac + \frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{8} a^4\right) x^5 + \cdots,$$

und:

$$OR + RP = \left(x - \frac{y}{y'}\right) + \frac{y}{y'} \sqrt{1 + y'^2}$$

$$= x + a^2 x^3 + \frac{5}{2} abx^4 + \left(3ac - a^4 + \frac{3}{2} b^2\right) x^5 + \cdots,$$

also:

$$\widehat{OP} = \frac{OR + RP + 2\,OP}{3} + \left(-\frac{ac}{15} + \frac{b^2}{15} + \frac{a^4}{60}\right) x^5 + \cdots,$$

oder:

$$\widehat{OP} \doteq \frac{OR + RP + 2\,OP}{3} \quad \text{(Lambert).[1]}$$

Für Kreisbogen ist dies natürlich die Snelliussche Formel.

Lambert prüft die Genauigkeit der Formel, indem er den Krümmungskreis an der betrachteten Stelle als Einheit und die Totalkrümmung gleich 5^0, 10^0, 15^0, 20^0 nimmt; er findet bzw. die Fehler

0,000 000 0
0,000 000 5
0,000 003 9
0,000 016 5.

Aus:

$$\widehat{OP} \doteq \frac{OR + RP + 2\,OP}{3},$$

$$\widehat{PP'} \doteq \frac{PR' + R'P' + 2\,PP'}{3},$$

$$\widehat{P'P''} \doteq \frac{P'R'' + R''P'' + 2\,P'P''}{3}$$

folgt allgemeiner:

$$\widehat{O \ldots P_n} \doteq \frac{U_n + 2u_n}{3},$$

wenn

$$u_n = OP + PP' + P'P'' + \cdots + P^{(n-1)}P^{(n)},$$
$$U_n = OR + RR' + R'R'' + \cdots + R^{(n-1)}P^{(n)}$$

gesetzt wird.

1) Beyträge II, p. 258.

Formeln von Tchebycheff, Simpson, Cotes, Gauss.

Die oben abgeleiteten und die analogen Formeln, wie

$$\frac{4u_{2n} - u_n}{3}, \quad \frac{4i_{2n} - i_n}{3} \text{ usw.},$$

sind, wie es scheint, unbeachtet geblieben, obwohl doch ein praktisches Bedürfnis nach solchen Formeln vorliegt; z. B. wird beim Feldmessen der Fehler bei einer freihängenden Meßkette von der Länge $2a$ infolge Durchhängens näherungsweise gleich $\frac{4}{3}\frac{h^2}{a}$ gesetzt,



wo h die Pfeilhöhe des Bogens ist.[1] Eine andere Formel zur mechanischen Rektifikation eines symmetrischen[2]) Bogens gab *Tchebycheff*[3]):

$$\widehat{AD} = \sqrt{AC^2 + CE^2} = \sqrt{a^2 + \frac{4}{3}h^2},$$

wo

$$CE = \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot CD = \sqrt{\frac{4}{3}}\, h$$

ist.

Die Formel für den Segmentinhalt: $\frac{4}{3}i_{2n} - \frac{1}{3}i_n$ gibt für den Fall $n = 1$, wo $i_n = 0$ wird, die bekannte Formel (s. o. S. 196 (2)): Inhalt gleich $\frac{2}{3}$ Grundlinie mal Höhe oder $\frac{2}{3}$ des dem Segment umschriebenen Rechtecks oder Parallelogramms. Und daraus folgt für eine Fläche, die von einem Bogen, zwei Ordinaten und der x-Achse begrenzt wird:

$$\begin{aligned} ABCD + \text{Segm } \widehat{CFD} &\div AB \cdot EJ + \frac{2}{3} AB \cdot EF, \\ &\div h \cdot \frac{a+b}{2} + \frac{2}{3} h \left(m - \frac{a+b}{2}\right), \\ &\div \frac{h}{6}(a + 4m + b), \end{aligned}$$

---

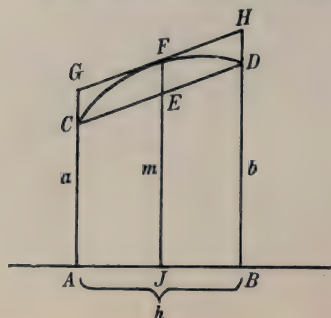
1) Vgl. z. B. Geisenheimer, Schlöm. Ztschr. 30 (1885), p. 325.

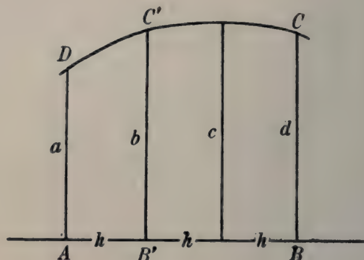
2) Unsymmetrische zerlegt man in Teile, die man als Hälften symmetrischer berechnet.

3) Règle pour la rectification approchée des arcs. D. Gravé in Bull. de l'Ac. de St. Petersbourg (5) II (1895), p. 131 = Oeuvres de Tchebycheff, II (Petersburg 1907), p. 720. Schlechter in der Annäherung sind natürlich die griechischen Formeln für Kreisbogen, z. B. $\widehat{AD} = AD + \frac{1}{8}CD$ (s. Heronis Alexandrini Geometricorum et Stereometricorum reliquiae ed. Hultsch, Berlin 1864, p. 125).

wo m die Mittelordinate JF ist; das ist die bekannte *Simpson*sche Formel.

Auch diese Formel hatte schon J. Gregory.[1]) Bekanntlich ist sie





die zweite einer ganzen Reihe ähnlicher Formeln von *Cotes*[2]); die dritte, die sogenannte $\frac{3}{8}$-Regel heißt: $AB\widehat{CD}$ gleich:

$$\frac{3}{8}h(a+3b+3c+d);$$

und noch vor der Simpsonschen Formel hat ihren Platz die Trapezformel: Inhalt $AB'\widehat{C'D}$ gleich $\frac{h}{2}(a+b)$. Diese Formeln, bei denen die Fläche durch äquidistante Ordinaten in Trapeze zerschnitten wird, haben ihren Ursprung in der Integralrechnung; sie werden meist bequemer sein als die obigen aus ein- und umbeschriebenen Polygonen, welche bei Sektoren und Polarkoordinaten zweckmäßig sind. *Gauss*[3]) hat ermittelt, wie die Distanzen zwischen den Ordinaten am vorteilhaftesten zu wählen sind. So hat man z. B. in der Trapezformel

$$\frac{h}{2}(a+b)$$

für a und b vorteilhafter nicht die Endordinaten, sondern die um $0{,}21\ldots h$ von ihnen entfernten zu wählen; und die Simpsonsche Formel ist zu ersetzen durch

$$\frac{h}{18}(5a+8m+5b),$$

wo a und b von den Endordinaten um $0{,}11\ldots h$ entfernt sind. Tchebycheff[4]) ermittelt für Formeln der Art:

---

1) Methodus componendi tabulas ... in den Excercitationes geometricae. Vgl. hierzu G. Heinrich, Bibl. math. (3) 1 (1900), p. 90.

2) Harmonia mensurarum 1722. Lambert l. c. II, p. 276ff.

3) Werke III, p. 163.

4) Liouv. J. (2) 19 (1874), p. 19 = Oeuvres II (Petersburg 1907), p. 163.

$$\frac{h}{2}(a+b), \quad \frac{h}{3}(a+m+b), \text{ usw.}$$

die vorteilhafteste Lage der Ordinaten.

Die analoge Frage kann man für die Approximation durch ein- und umbeschriebene Polygonzüge behandeln, indem man *natürliche Koordinaten* (Bogenlänge und Totalkrümmung) zugrunde legt. Beruhen die Cotesischen Formeln auf der Approximierung beliebiger Kurvenbogen durch höhere Parabeln gegebener Achsenrichtung (worin eine Willkürlichkeit liegt), so beruhen die hier behandelten auf der Approximierung durch Kreisbogen, was mehr im Sinne der „natürlichen Geometrie" (geometria intrinseca) ist. Übrigens fehlen zu den Cotesischen Formeln noch die analogen für die Rektifikation.

Beste Wahl der Zwischenpunkte.

Das Analogon zur Gaussschen zweckmäßigsten Wahl der Zwischenpunkte besteht bei *hyperbolischen* Bogen[1]) in folgendem: Zur Quadratur des Segmentes $\widehat{OP^{(n)}}$ sind die Zwischenpunkte $P', P'', \ldots$ am besten so zu wählen, daß der Sehnenzug $OPP'P''\ldots$ *regulär* ist, d. h. daß jede Sehne $[OP']$, $[PP'']$ usw. parallel zur Tangente in P bzw. P' usw. ist. Zum Beweise überzeuge man sich durch eine kleine Rechnung erstens, daß die Geraden $[RP']$, $[QP]$, $[R'O]$ nahe durch einen Punkt gehen, d. h., daß es einen Kegelschnitt- also Hyperbelbogen gibt, der nahe durch die Punkte OPP' geht und dort die Tangenten $[QR]$, $[RR']$, $[R'Q]$ hat. Durch affine Transformation (bzw. Parallelprojektion) geht dieser Hyperbelbogen in einen Bogen einer gleichachsigen Hyperbel über. Bei einer solchen ist aber $\frac{2}{3}J + \frac{1}{3}i$ Approximierung des Segmentes von *unten*, also am besten, wenn J und i ihre *Maxima* annehmen; das geschieht bei der angegebenen Wahl der Zwischenpunkte. Bei *elliptischen* Ovalbogen gibt dieselbe Wahl der Zwischenpunkte aus denselben Gründen die schlechteste Annäherung; also die beste, wenn man statt der arithmetischen die *harmonischen* Mittel nimmt.

Um auch für die *Rektifikation* mittels der Formel $\frac{1}{3}U + \frac{2}{3}u$ die beste Wahl der Zwischenpunkte anzugeben, übertrage man die für die Inhalte gefundenen Ergebnisse auf die Kugeloberfläche (oder Nicht-Euklidische *elliptische* Ebene). Alsdann gehe man zur Polarfigur über, wobei die Inhalte den Bogenlängen entsprechen, den eingeschriebenen die umgeschriebenen Polygone, der Formel $\frac{2}{3}J + \frac{1}{3}i$ die

1) Hyperbolische bzw. elliptische Bogen sind solche, von denen je 5 Punkte auf einer *Hyperbel* bzw. *Ellipse* liegen.

Formel $\frac{1}{3}U + \frac{2}{3}u$, der angegebenen regulären Teilung eine solche, bei welcher jede Seite des umschriebenen Vielseits den kleinsten Abstand vom Schnittpunkte der vorhergehenden und nachfolgenden hat, usw. Schließlich gehe man von der Kugel wieder auf die Ebene zurück. So erhält man das Resultat: für *elliptische* Bogen liefert das *harmonische* Mittel aus U und u (mit den Gewichten 1:2) die beste Rektifikation bei der angegebenen Wahl der Zwischenpunkte. Entsprechend erhält man für *hyperbolische* Bogen durch die Pseudosphäre (Nicht-Euklidische *hyperbolische* Ebene), daß das *arithmetische* Mittel aus U und u (mit den Gewichten 1 : 2) die beste Rektifikation bei der angegebenen Wahl der Zwischenpunkte liefert.

Für die wirkliche numerische Approximation wird man stets einfach nach den logarithmischen Formeln:

$$\text{Segm} \doteq J^{\frac{2}{3}} i^{\frac{1}{3}}, \quad \text{Bogen} \doteq U^{\frac{1}{3}} u^{\frac{2}{3}}$$

rechnen; da eine Einteilung eines Bogens in elliptische und hyperbolische Teile, und die Aufsuchung der besten Zwischenpunkte unnötig kompliziert wäre. Für das wirkliche Abgreifen der Entfernungen sind Formeln wie:

$$\frac{4}{3}u_{2n} - \frac{1}{3}u_n \quad \text{oder} \quad u_{2n}^{\frac{4}{3}} : u_n^{\frac{1}{3}}$$

bequemer, da sie nur *Sehnen*züge erfordern.

Zur approximativen *Rektifikation des Ellipsenquadranten* mit den Halbmessern $a > b$ gibt Schlömilch[1]) die Formel:

$$0{,}9827 \cdot a + 0{,}3110 \cdot b + 0{,}2867 \cdot \frac{b^2}{a},$$

die stets *zwei* richtige Dezimalstellen gibt; der Fehler erreicht nie 6‰ von a. Die Koeffizienten sind nach der Methode der kleinsten Quadratsummen bestimmt.

Mechanische Komplanationen und Kubaturen findet man bei Heron[2]), Kepler[3]), Lambert[4]), Geisenheimer[5]) u. a.[6])

1) Schlöm. Ztschr. 10 (1865), p. 501.

2) Metrica ed. H. Schöne (Leipzig 1903).

3) Stereometria doliorum, Opera omnia ed. Frisch, Francoforti et Erlangae 4 (1863), p. 545.

4) Beyträge I, p. 314.

5) Schlöm. Ztschr. 30 (1885), p. 325.

6) Cantor IV, p. 371.

Sechster Teil.

Analytische Approximationen.

Kapitel I.

Algebraische Hilfssätze.

Wurzeln und Linearteiler.

Die Summationsformel der geometrischen Reihe

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + y^{n-1}$$

liefert für „ganze Funktionen“:

$$f(x) = a + bx + cx^2 + \cdots + kx^n$$

die Formel:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = b + c(x + y) + d(x^2 + xy + y^2) + \cdots.$$

Ist also y eine Wurzel der Gleichung $f(y) = 0$, so ist $f(x)$ durch $x - y$ geteilt eine *ganze* Funktion von x. Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n-Wurzeln von $f(x) = 0$, so ist also $f(x)$ durch $(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$ teilbar, also:

$$f(x) = k(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n).$$

Eine nicht identisch erfüllte Gleichung n^{ten} Grades kann mithin nicht mehr als n Wurzeln haben.

Ableitung.

Jeder ganzen Funktion $f(x)$ wird eine ganze Funktion $f'(x)$, ihre „Ableitung“[1]) eindeutig derart zugeordnet, daß die Gleichungen gelten[2]):

1) Von Crelle eingeführt; richtiger wäre „Abgeleitete“ (sc. Funktion).

2) Die folgende formale Theorie der Ableitung (s. Vahlen, Acta math. 21 (1897), p. 294) ist in den Elementen völlig ausreichend. Sie genügt z. B. für die Theorie der Doppelwurzeln, Maxima und Minima, Tangenten, Wendepunkte, Krümmungen usw.

$$(f+g)' = f' + g',$$
$$(fg)' = f'g + fg',$$
$$x' = 1,$$
$$C' = 0,$$

für jede Konstante C.

Daraus folgt z. B.:

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh',$$

allgemein:

$$(f_0 f_1 \cdots f_r)' = f_0' f_1 \cdots f_r + f_0 f_1' f_2 \cdots f_r + \cdots f_0 f_1 \cdots f_{r-1} f_r',$$

wie durch den Schluß von n auf $n+1$ zu beweisen ist.

Setzt man speziell:

$$f_0 = f_1 = \cdots = f_{r-1} = g \quad \text{und} \quad f_r = h,$$

so folgt:

$$(g^r h)' = g^{r-1}(rhg' + gh');$$

wählt man noch $h = 1$, so folgt:

$$(g^r)' = r g^{r-1} g',$$

und speziell für $g = x$:

$$(x^r)' = r x^{r-1},$$

also für irgendeine ganze Funktion:

$$(a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots)' = b + 2cx + 3dx^2 + \cdots.$$

Ist $f = gh$, so ergibt sich aus $f' = g'h + gh'$, daß h' oder

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'}{g} - \frac{g'}{g} \cdot \frac{f}{g},$$

also:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

ist.

Dies ist für den Fall hergeleitet, daß $\frac{f}{g}$ eine ganze Funktion ist, muß also für den Fall, daß $\frac{f}{g}$ keine ganze Funktion ist, als Definition angenommen werden.[1])

Ebenso ist es möglich, wovon wir aber keinen Gebrauch zu machen haben, die Ableitung einer Funktion $y = F(x)$ zu definieren, welche durch eine Gleichung:

$$f(x) + g(x)y + h(x)y^2 + \cdots = 0$$

als implizite Funktion von x gegeben wird.

---

1) Das ist also eine Anwendung von Hankels Prinzip der Permanenz der formalen Gesetze; s. dessen Theorie der komplexen Zahlensysteme (Leipzig 1867) p. 10.

Mehrfache Teiler.

Von der Ableitung machen wir folgende wichtige Anwendung: Angenommen, f enthalte die irreduzible Funktion g in der r^{ten} und keiner höheren Potenz als Faktor:

$$f = g^r h,$$

wo also h nicht durch g teilbar ist; dann folgt aus:

$$f' = g^{r-1}(rhg' + gh'),$$

daß die irreduzible Funktion g in f' gerade $(r-1)$-mal enthalten ist. Der Faktor $(rhg' + gh')$ kann nämlich nicht durch g teilbar sein, da h zu g teilerfremd ist, während der Grad von g' um eine Einheit kleiner ist als g. Also ist f' gerade durch g^{r-1} teilbar.

Insbesondere, wenn mit f_1 der Gemeinteiler höchsten Grades von f und f' bezeichnet wird, so ist f_1 sicherlich durch g^{r-1} teilbar, aber durch keine höhere Potenz von g; folglich ist $\frac{f'}{f_1}$ eine ganze durch g nicht teilbare Funktion. Dasselbe gilt für *jeden* irreduktiblen Faktor von f; also ist $\frac{f'}{f_1}$ durch *keinen* Faktor von f teilbar.

Umgekehrt, ist der höchste Gemeinteiler von f und f', den man übrigens nach Kronecker mit (f, f') zu bezeichnen pflegt, durch g^{r-1} teilbar, also etwa $(f, f') = g^{r-1}h_1$, wo g eine irreduzible Funktion und h_1 nicht mehr durch g teilbar ist, so folgt, daß f durch g^r, aber durch keine höhere Potenz von g teilbar ist. Denn, sei

$$f = g^{r-1}k,$$

so wird

$$f' = g^{r-2}((r-1)g'k + gk'),$$

wo nun der Klammerausdruck und damit k durch g teilbar sein muß, d. h. es muß f mindestens durch g^r teilbar sein, während aus dem vorhin bewiesenen Satz folgt, daß f durch keine höhere als die r^{te} Potenz von g teilbar sein kann. Daraus ergibt sich dann der wichtige Satz: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß f und f' teilerfremd sind, besteht darin, daß f keine mehrfachen Teiler besitzt.

Formeln von Taylor und Lagrange.

Von der Ableitung machen wir eine andere wichtige Anwendung. Zunächst ist der Begriff einer Ableitung höherer Ordnung einzuführen. Die zweite Ableitung einer Funktion ist die Ableitung der ersten Ableitung; ebenso ist die dritte Ableitung die Ableitung der zweiten usw. Dann können wir die Binomialformel, die wir weiter unten beweisen:

$$(\alpha + \xi)^k = \alpha^k + \frac{k}{1}\alpha^{k-1}\xi + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2}\alpha^{k-2}\xi^2 + \cdots + \xi^k$$

mit Rücksicht auf $(\alpha^k)' = k\alpha^{k-1}$, $(k\alpha^{k-1})' = k(k-1)\alpha^{k-2}$, usw. schreiben:

$$(\alpha+\xi)^k = \alpha^k + (\alpha^k)'\frac{\xi}{1!} + (\alpha^k)''\frac{\xi^2}{2!} + (\alpha^k)'''\frac{\xi^3}{3!} + \cdots + (\alpha^k)^{(k)}\frac{\xi^k}{k!}.$$

Multiplizieren wir diese mit einem Zahlenfaktor a_k, geben k die Werte von 0 bis n und summieren die so entstehenden Gleichungen, so bekommen wir:

$$a_0 + a_1(\alpha+\xi) + a_2(\alpha+\xi)^2 + \cdots + a_n(\alpha+\xi)^n$$
$$= (a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_n\alpha^n) + \frac{\xi}{1!}(a_1 + 2a_2\alpha + \cdots + na_n\alpha^{n-1}) + \cdots$$

oder, wenn

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = f(x)$$

gesetzt wird:

$$f(\alpha+\xi) = f(\alpha) + \frac{\xi}{1!}f'(\alpha) + \frac{\xi^2}{2!}f''(\alpha) + \cdots + \frac{\xi^n}{n!}f^{(n)}(\alpha).$$

Das ist die sogenannte *Taylor*sche Formel[1]); sie geht durch die Substitution:

$$\alpha + \xi = x$$

über in:

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n.$$

Eine Funktion $f(x)$ von höherem als n^{ten} Grade wird durch diese Formel

$$f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + \cdots + f^{(n)}(\alpha)\frac{(x-\alpha)^n}{n!}$$

näherungsweise dargestellt, und zwar in der Weise, daß die Näherungsformel an der Stelle $x = \alpha$ den richtigen Wert für $f(x)$ und die Ableitungen bis zur n^{ten} Ordnung einschließlich gibt, oder, daß die Gleichung

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + \cdots + f^{(n)}(\alpha)\frac{(x-\alpha)^n}{n!}$$

die $(n+1)$-fache Wurzel $x = \alpha$ hat. Wir nennen das: *oskulierende Approximation der Ordnung n.*

Es sei $g(x)$ eine ganze Funktion vom Grade $< n$. Wir betrachten die Gleichung (*Lagranges* Interpolationsformel):

$$g(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)}g(x_1) + \frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)}g(x_2) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})}g(x_n),$$

die offenbar erfüllt ist, wenn wir darin

$$x = x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$$

einsetzen, also mit Rücksicht auf S. 215 identisch gilt.

1) Brook Taylor, Methodus incrementorum directa et inversa. London 1717. Cap. 97.

Setzt man $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$, so wird:

$$f'(x) = (x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n) + (x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n) + \cdots$$
$$\cdots + (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1}),$$

also:

$$f'(x_1) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\cdots(x_1 - x_n),$$
$$f'(x_2) = (x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\cdots(x_2 - x_n),$$
$$\vdots$$
$$f'(x_n) = (x_n - x_1)(x_n - x_2)\cdots(x_n - x_{n-1}),$$

also kann man die obige Formel schreiben:

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g(x_1)}{f'(x_1)} \cdot \frac{1}{x - x_1} + \frac{g(x_2)}{f'(x_2)} \cdot \frac{1}{x - x_2} + \cdots + \frac{g(x_n)}{f'(x_n)} \cdot \frac{1}{x - x_n}.$$

In dieser Form repräsentiert die Formel die Zerlegung der gebrochenen Funktion $\frac{g(x)}{f(x)}$ in *Partialbrüche*, deren Nenner $x - x_1$, $x - x_2$, $\cdots$, $x - x_n$ die einzelnen Linearfaktoren von $f(x)$ sind.

Durch die *Lagrange*sche Interpolationsformel wird $g(x)$ vollkommen bestimmt, wenn an n verschiedenen Stellen die Werte von $g(x)$ gegeben sind. Ist $g(x)$ von höherem als dem $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade, so wird durch dieselbe Formel die Funktion $g(x)$ mit Hilfe der Werte, die sie an den n Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ hat, *näherungsweise* durch eine Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades dargestellt[1]); dies ist eine *interpolierende Approximation.*

Allgemeiner läßt sich eine Funktion bzw. genau oder approximativ darstellen durch die Werte, die sie und ihre Ableitungen an gegebenen Stellen und an jeder bis zu bestimmten Ordnungen hin annehmen.[2])

Wurzeln aus komplexen Zahlen, Moivresche Gleichungen, Cardanische Formel.

Wir setzen:

$$x + y = s,$$
$$xy = p,$$
$$x^n + y^n = s_n,$$

dann ist identisch:

$$s_n - s_{n-1}\, s + p\, s_{n-2} = 0. \tag{1}$$

Hierdurch können die Größen $s_2, s_3, s_4, \ldots$ sukzessive aus den beiden Größen s, p berechnet werden. Statt aus dieser *Rekursionsformel* kann man s_n aus der *independenten* Gleichung berechnen:

1) J. L. Lagrange, Oeuvres 5, p. 517, 663; 7, p. 535.

2) S. Hermite, Crelles J. 84 (1877), p. 70. Die von Zemplén (Arch. d. Math. u. Phys. (3) 8 (1904), p. 214) gegebene Formel ist falsch.

$$s_n = s^n - \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} s^{n-2} p + \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} s^{n-4} p^2 - \cdots, \tag{2}$$

wo

$$\begin{bmatrix} n \\ h \end{bmatrix} = \frac{n(n-h-1)(n-h-2)\cdots(n-2h+1)}{h!} \tag{3}$$

gesetzt ist.

Wir beweisen diese Gleichung (2) durch den Schluß von n auf $n+1$; zunächst ist:

$$\begin{bmatrix} n \\ h \end{bmatrix} = \binom{n-h}{h} + \binom{n-h-1}{h-1}, \tag{3a}$$

ferner (s. u.):

$$\left.\begin{aligned} \binom{n-h+1}{h} &= \binom{n-h}{h} + \binom{n-h}{h-1}, \\ \binom{n-h}{h-1} &= \binom{n-h-1}{h-1} + \binom{n-h-1}{h-2}, \end{aligned}\right\}$$

also:

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ h-1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Dies vorausgeschickt nehmen wir an, es sei bereits die Gleichung bewiesen:

$$s_n = s^n - \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} s^{n-2} p + \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} s^{n-4} p^2 + \cdots;$$

dann ist nach (1):

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= s_n s - p s_{n-1} \\ &= s^{n+1} - \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} s^{n-1} p + \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} s^{n-3} p^2 - \cdots \\ &\qquad - s^{n-1} p + \begin{bmatrix} n-1 \\ 1 \end{bmatrix} s^{n-3} p^2 - \cdots \end{aligned}$$

oder nach (4):

$$s_{n+1} = s^{n+1} - \begin{bmatrix} n+1 \\ 1 \end{bmatrix} s^{n-1} p + \begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix} s^{n-3} p^2 - \cdots;$$

also gilt die Gleichung (2) auch für $(n+1)$ und demnach allgemein, da ja für $n = 2$:

$$s_2 = s^2 - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} p$$

ist.

Das wenden wir an zur Berechnung von Wurzeln aus komplexen Zahlen. Wir setzen:

$$\sqrt[n]{q + ir} = x,$$

$$\sqrt[n]{q - ir} = y,$$

so daß:

$$p = xy = \sqrt[n]{q^2 + r^2}$$

reell und positiv ist; ferner wird:

$$r = \sqrt{p^n - q^2},$$
$$2q = x^n + y^n,$$

also:

$$s = \sqrt[n]{q + ir} + \sqrt[n]{q - ir}$$
$$= \sqrt{q + \sqrt[2]{q^2 - p^n}} + \sqrt[n]{q - \sqrt{q^2 - p^n}}$$

eine Wurzel der Gleichung:

$$s^n - \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} s^{n-2} p + \cdots = 2q.$$[1]

Und man erhält alle n, indem man $\sqrt[n]{q + ir}$ die n Werte beilegt und immer

$$\sqrt[n]{q - ir} = \frac{p}{\sqrt[n]{q + ir}}$$

nimmt. Demnach sind alle n Wurzeln reell.

Das gibt z. B.:

1. für $n = 2$, wenn wir pi statt p setzen:

$$\sqrt{2q + 2pi} = \pm \sqrt{q + \sqrt{q^2 + p^2}} \pm i \sqrt{-q + \sqrt{q^2 + p^2}},$$

so daß man also jede quadratisch irrationale Zahl in die Form $a + bi$ bringen kann, wo a und b *reelle* und durch reelle Radikale berechenbare quadratisch irrationale Zahlen sind;

2. für $n = 3$:

für die Gleichung $s^3 - 3ps = 2q$ die Wurzeln

$$s_1 = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}} \quad (\textit{Cardani}\text{sche Formel}^{2})),$$

$$\left.\begin{aligned} s_2 &= \varepsilon \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \varepsilon^2 \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}} \\ s_3 &= \varepsilon^2 \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \varepsilon \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}} \end{aligned}\right\}, \quad \text{wo } \varepsilon = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3} \text{ ist.}$$

Will man $\sqrt[n]{q + ir} = x$ berechnen, so stelle man mit $p = \sqrt[n]{q^2 + r^2}$ zunächst die Gleichung:

$$s^n - \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} s^{n-2} p + \cdots = 2q$$

auf; hat man von dieser eine Wurzel s gefunden, so ist, da außerdem

$$p = \sqrt[n]{q + ir} \cdot \sqrt[n]{q - ir}$$

1) A. de Moivre (1667—1754), Phil. Trans. 1707, Nr. 309, p. 2368—2371.

2) Cardano, Ars magna de rebus Algebraicis Nürnberg 1545. Üb. d. Geschichte s. p. 62 und Cantor II, p. 441.

ist, die gesuchte Wurzel:

$$\sqrt[n]{q \pm ir} = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4p}}{2}.$$

Demnach ist die Ausziehung einer Wurzel aus einer komplexen Zahl zu bewerkstelligen durch Auflösung einer (*Moivre*schen) Gleichung mit nur reellen Wurzeln. Daß auch umgekehrt die Auflösung einer durch Wurzeln, aber nicht Quadratwurzeln auflösbaren Gleichung mit nur reellen Wurzeln stets Wurzelausziehungen aus komplexen Zahlen erfordert, hat *Hölder* [1]) bewiesen. Dadurch erhält die Benennung „*casus irreducibilis*" bei kubischen Gleichungen mit drei verschiedenen reellen Wurzeln erst ihre Berechtigung.

Wurzelgrenzen nach Laguerre.[2])

Es tritt vielfach die Frage auf, aus den Koeffizienten einer gegebenen Gleichung, ohne die Gleichung aufzulösen, Grenzen für die Wurzeln der Gleichung herzuleiten. Von den zahlreichen Sätzen, die hierfür gegeben sind, interessiert uns an dieser Stelle nur ein Satz von *Laguerre*, der sich allerdings nur auf Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln bezieht. Dieser bemerkenswerte Satz wird uns später Approximationen für die Bogenteilung ergeben. Er ist verhältnismäßig wenig bekannt, was wohl daran liegt, daß die *Laguerre*sche Herleitung nicht mit einfachen Mitteln erfolgt und nicht sehr durchsichtig ist. Schon *Hermite* hat eine etwas, aber nicht viel einfachere Herleitung angegeben [3]) Wir geben im folgenden eine ganz elementare.

Es seien $\alpha, \beta, \gamma \ldots n$ reelle Größen, die den Gleichungen genügen:

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots = 0,$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \cdots = s_2,$$

dann ist identisch:

$$(n-1)\, s_2 = n\, \alpha^2 + \sum (\beta - \gamma)^2,$$

woraus folgt, daß der absolut größte Wert, den α annehmen kann,

$$\sqrt{\frac{n-1}{n}\, s_2}$$

ist.

Zweitens mögen die n reellen Zahlen den beiden Gleichungen genügen:

1) Math. Ann. 38 (1891), p. 307.

2) Nouv. ann. d. math. (2) 19 (1880), p. 161; Compt. rend. 90 (Paris 1880), p. 304 = Oeuvres I (Paris 1898), p. 87, 104.

3) Oeuvres de Laguerre I, p. 461.

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots = s_1,$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \cdots = s_2.$$

Dieser Fall wird auf den vorigen zurückgeführt, indem man statt α, β, γ, ..., setzt:

$$\alpha - \frac{s_1}{n}, \quad \beta - \frac{s_1}{n} \cdots;$$

also besteht hier die identische Relation:

$$(n-1)\left(s_2 - \frac{s_1^2}{n}\right) = n\left(\alpha - \frac{s_1}{n}\right)^2 + \sum (\beta - \gamma)^2$$

oder:

$$(n\alpha - s_1)^2 + n\sum (\beta - \gamma)^2 = n(n-1)s_2 - (n-1)s_1^2.$$

Demnach ist der absolut größte Wert von $(n\alpha - s_1)$:

$$\sqrt{n(n-1)s_2 - (n-1)s_1^2}.$$

Sind nun α, β, γ, ... die Wurzeln der Gleichung:

$$ax^n + nbx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}cx^{n-2} + \cdots = 0,$$

also:

$$s_1 = -\frac{nb}{a},$$

$$s_2 = \frac{n^2b^2 - n(n-1)ac}{a^2},$$

so ergibt sich, daß für alle Wurzeln der Wert $(ax+b)$ zwischen $+$ und $-(n-1)\sqrt{b^2 - ac}$ liegt. Allgemeiner: eine Gleichung $f(x) = 0$ vom Grade n läßt sich nach dem Taylorschen Satz in die Form setzen:

$$f(x_0)\left(\frac{1}{x - x_0}\right)^n + f'(x_0)\left(\frac{1}{x - x_0}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}f''(x_0)\left(\frac{1}{x - x_0}\right)^{n-2} + \cdots = 0;$$

folglich ergibt sich, daß für jede Wurzel x der Ausdruck:

$$\frac{f(x_0)}{x - x_0} + \frac{f'(x_0)}{n}$$

zwischen den Grenzen

$$\pm (n-1)\sqrt{\frac{f'^2}{n^2} - \frac{ff''}{n(n-1)}},$$

oder was dasselbe ist:

$$\frac{1}{x - x_0} \text{ zwischen den Grenzen } \frac{-f' \pm \sqrt{(n-1)^2 f'^2 - n(n-1)ff''}}{nf}$$

liegt, wo $f = f(x_0)$, $f' = f'(x_0)$, $f'' = f''(x_0)$ ist.

Sind also x_1 und x_2 diejenigen beiden Wurzeln, zwischen denen x_0 liegt, und berechnet man aus der Gleichung:

$$\frac{1}{x - x_0} = \frac{-f' \pm \sqrt{(n-1)^2 f'^2 - n(n-1)ff''}}{nf}$$

die beiden Werte von x, so liegt der eine zwischen x_0 und x_1, der andere zwischen x_0 und x_2; diese können als Näherungswerte von x_1 und x_2 angesehen werden. Nimmt man einen von ihnen für x_0, so kommt man der betreffenden Wurzel x_1 oder x_2 noch näher, usw.

Zum Beispiel liefert die Formel:

$$\frac{-b \pm (n-1)\sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

für die Gleichung:

$$x^3 - 7x - 7 = 0$$

den auf zwei Stellen richtigen Näherungswert $x_0 = 2\sqrt{\frac{7}{3}} = 3{,}05\ldots$, und der zweite Schritt liefert bereits auf sieben Stellen richtig $3{,}0489154\ldots$

Binomischer Lehrsatz.

Der binomische Satz drückt sich durch die folgende Formel aus[1]):

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{p} a^{n-p} b^p + \cdots + b^n. \quad (1)$$

Die „Binomialkoeffizienten“:

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots p} \quad (2)$$

besitzen die folgende Fundamentaleigenschaft:

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}. \quad (3)$$

Wir beweisen die Binomialformel zunächst für den Fall, daß n eine positive ganze Zahl ist; und zwar durch den Schluß von n auf $(n+1)$.

Multipliziert man (1) beiderseits mit $(a+b)$ so ergibt sich:

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \left\{\binom{n}{1} + 1\right\} a^n b + \left\{\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\right\} a^{n-1} b^2 + \cdots$$

$$\cdots + \left\{\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}\right\} a^{n-p} b^{p+1} + \cdots + b^{n+1},$$

also, wegen (3):

$$= a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b + \cdots + \binom{n+1}{1} a^{n+1-p} b^p + \cdots + b^{n+1}.$$

1) Aus Briefen J. Newtons vom 13. Juni und 24. Oktober 1676 an H. Oldemburg (Opuscula I, Lausanne und Genf 1744, p. 307, 328) geht hervor, daß er das independente Koeffizientengesetz (2) vor 1676 gehabt hat; s. Wallis, Opera III, 634; Comm epistol. ed. Biot.-Lefort, p. 125. Die Rekursionsformel (3) hatte schon Michael Stifel (Arithmetica integra, Nürnberg 1844, Fol. 44b).

Setzt man speziell $a = 1$, $b = x$, so wird die Binomialformel (1):

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2} x^2 + \cdots + nx^{n-1} + x^n,$$

aus der umgekehrt für $x = \frac{b}{a}$ (1) folgt. Schreibt man die Formel (1):

$$\frac{(a+b)^n}{n!} = \sum_{h=0}^{n} \frac{a^{n-h} b^h}{(n-h)!\, h!}, \tag{1 a}$$

so erhält man daraus durch wiederholte Anwendung die Polynomialformel:

$$\frac{(a_0 + a_1 + \cdots + a_k)^n}{n!} = \sum_{h_1, h_2, \cdots, h_k = 0, \cdots, n} \frac{a_0^{n - h_1 - h_2 - \cdots - h_k}}{(n - h_1 - h_2 - \cdots - h_k)!} \frac{a_1^{h_1}}{h_1!} \frac{a_2^{h_2}}{h_2!} \cdots \frac{a_k^{h_k}}{h_k!} \tag{1 b}$$

Für die Binomialkoeffizienten gilt noch folgende weitere Relation, das *Additionstheorem* derselben[1]):

$$\binom{p+q}{h} = \binom{q}{h} + \binom{p}{1}\binom{q}{h-1} + \binom{p}{2}\binom{q}{h-2} + \cdots \tag{4}$$

Die Richtigkeit dieser Formel für positive ganze Zahlen p und q ergibt sich durch Koeffizientenvergleichung aus:

$$(1 + x)^p (1 + x)^q = (1 + x)^{p+q}.$$

Da diese Formel (4) also bei gegebenem q für unendlich viele Zahlen p gilt, so gilt sie identisch für *alle* p und ebenso für *alle* q.

Nunmehr ist der binomische Satz auf irrationale Exponenten auszudehnen. Zunächst ist a^b zu definieren, wenn a positiv reell, b irrational ist: a^b wird durch die Festsetzung definiert, daß es diejenige Zahl ist, welche zwischen allen Zahlen $a^{b'}$ und $a^{b''}$ liegt, wobei $b' < b$ und $b'' > b$ alle rationalen Zahlen sind.[2])

Es handelt sich also um den Beweis der Formel:

$$1 + \binom{p}{1} x + \binom{p}{2} x^2 + \cdots = (1 + x)^p$$

für beliebige reelle p.[3]) Vor allem ist die Konvergenz der Reihe:

---

1) L. Euler, Petrop. Comment. 19 ad annum 1774 (1775), p. 103.

2) Über die *eindeutige* Bestimmung einer irrationalen Zahl durch Vergleich mit allen rationalen oder allgemeiner mit allen Zahlen einer „dichten" Menge s. Vahlen, Abstrakte Geometrie (Leipzig 1905, p. 9, Satz 18). Die Potenzen von a mit *rationalen* Exponenten a^b liegen dicht, denn da $a^{\pm\frac{1}{n}}$ für große n beliebig $\doteq 1$ wird, kann $a^{\pm\frac{m}{n}}$ einer beliebigen positiven Zahl beliebig $\doteq$ gemacht werden.

3) Unbewiesen bei Newton l. c., Eulers Beweis (l. c.) gilt zunächst nur für rationale p, Erweiterung auf irrationale und Konvergenzfeststellung bei Cauchy, Analyse algébrique (Paris 1821), p. 104, 153.

$$1 + \binom{p}{1} x + \binom{p}{2} x^2 + \cdots \qquad \text{für } |x| < 1$$

nachzuweisen.

Die gegebene Reihe wird absolut genommen:

$$\leqq 1 + \left|\frac{p}{1}\right| |x| + \left|\frac{p}{1}\right| \left|\frac{p-1}{2}\right| |x|^2 + \cdots.$$

Das $(h+1)^{\text{te}}$ Glied entsteht aus dem h^{ten} durch Multiplikation mit:

$$\left|\frac{p+1}{h+1} - 1\right| |x| = q_h;$$

für große h gibt es sicher eine Zahl $q < 1$, so daß für alle folgenden h stets $q_h < q$ ist, also wird:

$$\begin{aligned} q_h + q_h q_{h+1} + \cdots &< q + q^2 + q^3 + \cdots \\ &< \frac{q}{1-q}. \end{aligned}$$

Also ist:

$$\left|1 + \binom{p}{1} x + \cdots\right| < 1 + q_0 + q_0 q_1 + \cdots + q_0 q_1 \cdots q_{h-1} \frac{q}{1-q},$$

womit die Konvergenz der Reihe bewiesen ist.

Ferner ist identisch mit Rücksicht auf die Relation (4):

$$\left(1 + \binom{p}{1} x + \cdots\right)\left(1 + \binom{q}{1} x + \cdots\right) = 1 + \binom{p+q}{1} x + \cdots. \tag{5}$$

Daraus ergibt sich für $q = -p$

$$\left(1 + \binom{p}{1} x + \cdots\right)\left(1 + \binom{-p}{1} x + \cdots\right) = 1,$$

also mit Rücksicht auf $(1+x)^p (1+x)^{-p} = 1$, daß aus der Gültigkeit des Satzes für einen Exponenten auch die Gültigkeit für den negativen Exponenten folgt. Noch ist zu zeigen, daß die Reihe stets positiv, und zwar für positive px größer, für negative px kleiner als 1 ist. Mit Rücksicht auf die Gleichung

$$\left(1 + \binom{p}{1} x + \cdots\right)\left(1 + \binom{-p}{1} x + \cdots\right) = 1$$

braucht man das nur entweder für positive oder für negative p zu beweisen. Für negatives p und negatives x sind aber alle Glieder der Reihe positiv, also die Reihe > 1. Für positive p und positive x sei p zwischen den ganzen Zahlen h und $h-1$ gelegen; dann sind die Glieder bis zu $\binom{p}{h} x^h$ positiv, von da ab wechselnd positiv und negativ. Je zwei solche aufeinanderfolgende Glieder, deren erstes positiv ist, geben:

$$\binom{p}{k} x^k + \binom{p}{k+1} x^{k+1} = \binom{p}{k} x^k \left(1 + x\frac{p-k}{k+1}\right) = \binom{p}{k} x^k \left(1 - x + \frac{p+1}{k+1} x\right),$$

also eine positive Summe; so daß auch in diesem Falle die Reihe > 1 ist. Hieraus und aus der Formel (5) für $q > 0$ folgt noch, daß bei positivem x die Reihe mit wachsendem p wächst, bei negativem x abnimmt.

Aus (5) folgt ferner:

$$\left(1 + \binom{p}{1} x + \binom{p}{2} x^2 + \cdots\right)^n = 1 + \binom{np}{1} x + \binom{np}{2} x^2 + \cdots$$

und für $p = \frac{m}{n}$:

$$1 + \binom{p}{1} x + \cdots = (1 + x)^{\frac{m}{n}},$$

hierunter der reelle positive Wert verstanden.

Jetzt sei p eine irrationale positive Zahl und x positiv, es soll die Richtigkeit von

$$(1 + x)^p = 1 + \binom{p}{1} x + \cdots$$

bewiesen werden. Man kann bei gegebenem x stets p' so bestimmen, daß

$$1 + \binom{p}{1} x + \cdots = (1 + x)^{p'}$$

ist.[1]) Wäre nun z. B. $p' < p$, dann gäbe es eine rationale Zahl r derart, daß

$$p' < r < p$$

ist. Dann wäre, wie oben gezeigt:

$$1 + \binom{p}{1} x + \cdots > 1 + \binom{r}{1} x + \cdots$$

d. h.

$$(1 + x)^{p'} > (1 + x)^r,$$

was wegen $p' < r$, $1 + x > 1$ unmöglich ist. Ebenso wird die Annahme $p' > p$ widerlegt. Demnach ist:

$$(1 + x)^p = 1 + \binom{p}{1} x + \cdots$$

für beliebiges positives und damit nach dem, was oben bemerkt wurde, auch negatives p bei positivem $x < 1$ bewiesen.

Für negatives x nehmen wir p negativ, und es sei wieder p' so bestimmt, daß

$$1 + \binom{p}{1} x + \cdots = (1 + x)^{p'}$$

1) Ein irrationaler Exponent λ wird nämlich (s. S. 225 [2]) *eindeutig* durch die Forderung definiert, zwischen allen rationalen Exponenten λ' einerseits, λ'' andererseits zu liegen, für welche die λ'^{te} (bzw. λ''^{te}) Potenz einer gegebenen positiven Zahl kleiner (bzw. größer) als eine andere gegebene positive Zahl ist.

ist. Wäre nun z. B. $p' < p$, dann gäbe es eine rationale Zahl r, so daß

$$p > r > p'$$

ist. Dann wäre, wie oben gezeigt,

$$1 + \binom{p}{1} x + \cdots < 1 + \binom{r}{1} x + \cdots$$

also:

$$(1 + x)^{p'} < (1 + x)^r,$$

was wegen $p' < r'$ und $1 + x < 1$ unmöglich ist. Ebenso wird die Annahme $p' > p$ widerlegt. Damit ist der binomische Satz für reelle x mit $|x| < 1$ und für beliebige reelle Exponenten bewiesen.

Binomialformeln.

Zu den beiden bisher aufgestellten Relationen für die Binomialkoeffizienten:

$$\binom{p+1}{h} = \binom{p}{h} + \binom{p}{h-1},$$

$$\binom{p+q}{h} = \binom{p}{h} + \binom{p}{h-1}\binom{q}{1} + \binom{p}{h-2}\binom{q}{2} + \cdots + \binom{q}{h},$$

deren erste in der zweiten für $q = 1$ enthalten ist, fügen wir noch einige weitere hinzu, die wir später brauchen. Es ist:

$$(1 + x)^p = 1 + \binom{p}{1} x + \binom{p}{2} x^2 + \cdots$$

und

$$(1 + x)^{-(q+1)} = 1 - \binom{q+1}{1} x + \binom{q+2}{2} x^2 - \cdots,$$

also

$$\sum (-1)^h x^h \binom{q-p+h}{h} = (1 + x)^{p-(q+1)} =$$

$$\sum (-1)^h x^h \left\{ \binom{q+h}{h} - \binom{q+h-1}{h-1}\binom{p}{1} + \binom{q+h-2}{h-2}\binom{p}{2} - \cdots \right\}.$$

Daraus folgt durch Koeffizientenvergleichung:

I. für $p < q + 1$ oder $p - (q + 1) < 0$

$$\binom{q-p+h}{h} = \binom{q+h}{h} - \binom{q+h-1}{h-1}\binom{p}{1} + \binom{q+h-2}{h-2}\binom{p}{2} - \cdots$$

oder wenn man q statt $q + h$ setzt:

$$\binom{q-p}{h} = \binom{q}{h} - \binom{q-1}{h-1}\binom{p}{1} + \binom{q-2}{h-2}\binom{p}{2} - \cdots;$$

II. für $q+1 \leqq p < q+1+h$ oder $0 \leqq p-(q+1) < h$, wenn man wieder $q+h$ durch q ersetzt:

$$0 = \binom{q}{h} - \binom{q-1}{h-1}\binom{p}{1} + \binom{q-2}{h-2}\binom{p}{2} - \cdots,$$

was also für $0 \leqq p-(q-h+1) < h < q$ d. h. für $q+1-p \leqq h < q$ gilt;

III.

$$\frac{q!}{h!} - \binom{p}{1}\frac{(q-1)!}{(h-1)!} + \binom{p}{2}\frac{(q-2)!}{(h-2)!} - \cdots$$
$$= (-1)^p \frac{(h-q)(h-q+1)\cdots(h-q+p-1)}{h!}(q-p)!.$$

Diese Formel beweisen wir durch den Schluß von $p-1$ auf p. Für $p=1$ ist sie offenbar richtig, denn es ist:

$$\frac{q!}{h!} - \frac{(q-1)!}{(h-1)!} = \frac{(q-1)!}{h!}(q-h) = (-1)^1 \frac{(h-q)}{h!}(q-1)!.$$

Da die Formel für $p-1$ als richtig vorausgesetzt wird, ist:

$$\frac{q!}{h!} - \binom{p-1}{1}\frac{(q-1)!}{(h-1)!} + \binom{p-1}{2}\frac{(q-2)!}{(h-2)!} + \cdots$$
$$= (-1)^{p-1}\frac{(h-q)(h-q+1)\cdots(h-q+p-2)}{h!}(q-p+1)!,$$

und

$$\frac{(q-1)!}{(h-1)!} - \binom{p-1}{1}\frac{(q-2)!}{(h-2)!} + \cdots$$
$$= (-1)^{p-1}\frac{(h-q)(h-q+1)\cdots(h-q+p-2)}{(h-1)!}(q-p)!;$$

daraus folgt durch Subtraktion:

$$\frac{q!}{h!} - \binom{p}{1}\frac{(q-1)!}{(h-1)!} + \binom{p}{2}\frac{(q-2)!}{(h-2)!} + \cdots$$
$$= (-1)^p \frac{(h-q)(h-q+1)\cdots(h-q+p-2)}{h!}(h-(q-p+1))(q-p)!$$

also

$$= (-1)^p \frac{(h-q)(h-q+1)\cdots(h-q+p-1)}{h!}(q-p)!,$$

was zu beweisen war.

Additionstheoreme für Potenzsummen.

Die Formel

$$a^n b^n = (ab)^n$$

läßt die Verallgemeinerung zu

$$\frac{a^n + a'^n}{2} \cdot \frac{b^n + b'^n}{2} + \frac{a^n - a'^n}{2} \cdot \frac{b^n - b'^n}{2} = \frac{(ab)^n + (a'b')^n}{2}$$

$$\frac{a^n - a'^n}{2} \cdot \frac{b^n + b'^n}{2} + \frac{a^n + a'^n}{2} \cdot \frac{b^n - b'^n}{2} = \frac{(ab)^n - (a'b')^n}{2}.$$

Auf die analogen Formeln für die drei- oder mehrgliedrigen Potenzsummen, wie

$$\frac{a^n + a'^n + a''^n}{3}, \quad \frac{a^n + \varepsilon a'^n + \varepsilon^2 a''^n}{3}, \quad \frac{a^n + \varepsilon^2 a'^n + \varepsilon a''^n}{3}$$

kann hier nur im Vorbeigehen hingewiesen werden.

Kapitel II.

Grenzfälle algebraischer Formeln.

Exponentialreihe.

Es wird

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n=\infty}\left(1 + x + \frac{1-\frac{1}{n}}{1\cdot 2}x^2 + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots\right)^{1)}$$

$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots; \qquad (1)$$

das werde mit e_x bezeichnet; diese Reihe heißt die Exponentialreihe. Sie konvergiert für jeden Wert von $|x|$. Denn ist n eine ganze Zahl größer als $|x|$, so ist die Summe der absolut genommenen Glieder vom n^{ten} ab

$$\frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!}\left(1 + \frac{|x|}{n} + \frac{|x|^2}{n(n+1)} + \cdots\right) < \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!}\left(1 + \left|\frac{x}{n}\right| + \left|\frac{x}{n}\right|^2 + \cdots\right)$$

d. h.

$$< \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{1-\left|\frac{x}{n}\right|}.$$

Dann ist

$$e_x e_y = 1 + \left(\frac{x}{1!} + \frac{y}{1!}\right) + \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x}{1!}\frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!}\right)$$
$$+ \left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2!}\frac{y}{1!} + \frac{x}{1!}\frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!}\right) + \cdots = e_{x+y} \qquad (2)$$

---

1) Der Rest dieser Reihe vom k^{ten} Gliede ab wird für *jedes* $n > N$ durch Wahl eines und desselben k kleiner als eine gegebene beliebig kleine Größe, und die Summe der ersten $k-1$ Glieder unterscheidet sich bei hinreichend großem n von derselben für $n = \infty$ beliebig wenig. Dadurch wird die Vertauschung der beiden Grenzübergänge gerechtfertigt, die Euler (Misc. Berol. 7

(wegen (1a) S. 225). Daraus folgt insbesondere

$$e_x e_{-x} = 1.$$

Jetzt soll die Formel[1])

$$e_x = e^x \qquad (e = e_1)$$

bewiesen werden. Wegen

$$e_x e_{-x} = 1 = e^x e^{-x}$$

genügt es, die fragliche Formel für positive x zu beweisen.

Für jede ganze Zahl n folgt aus (2) $e_x^n = e_{nx}$, folglich ist der reelle positive Wert von $e_{nx}^{\frac{1}{n}} = e_x$, also:

$$e_x^{\frac{1}{n}} = e_{\frac{x}{n}},$$

$$e_x^{\frac{m}{n}} = e_{\frac{m}{n}x},$$

$$e_{\frac{m}{n}} = e^{\frac{m}{n}},$$

d. h.

$$e_x = e^x \tag{3}$$

für positives rationales x. Um die Gleichung auch für irrationale x zu beweisen, muß man beachten, daß (wegen (2)) e_x mit positivem wachsenden x wächst und größer als 1 ist. Wäre jetzt

$$e_x = e^{x'},$$

also $x' > 0$ und es wäre z. B. $x < x'$, so wähle man eine rationale Zahl r so, daß $x < r < x'$ ist, dann folgt: $e_x < e_r$; also müßte $e^{x'} < e^r$ sein, was unmöglich ist. Damit ist für beliebige reelle Exponenten bewiesen:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots.$$

Hyperbelfunktionen[2]) und Hyperbelquadratur.

Aus

$$e^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \cdots$$

und

$$e^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} - \cdots$$

[1743], p. 177; Introductio in analysin infinitorum [Lausanne 1748], p. 85) unbedenklich vollzog und Cauchy (Exercices d'analyse 4 [1847], p. 237) begründete.

1) Cauchy, Analyse algébrique, p. 168.

2) Über diese vgl. z. B. Laisant, Essai sur les fonctions hyperboliques. Paris 1874; S. Günther, Die Lehre von den Hyperbelfunktionen. Halle 1881.

folgt noch

$$\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}=1+\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}+\cdots=\cos\operatorname{hyp}\alpha$$

und

$$\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}=\alpha+\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^5}{5!}+\cdots=\sin\operatorname{hyp}\alpha.$$

Aus

$$e^{\alpha}=\cos\operatorname{hyp}\alpha+\sin\operatorname{hyp}\alpha$$

$$e^{-\alpha}=\cos\operatorname{hyp}\alpha-\sin\operatorname{hyp}\alpha$$

folgt, wenn $\cos\operatorname{hyp}\alpha=\frac{x}{a}$, $\sin\operatorname{hyp}\alpha=\frac{y}{b}$ gesetzt wird, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, so daß $x=a\cos\operatorname{hyp}\alpha$, $y=b\sin\operatorname{hyp}\alpha$ eine Parameterdarstellung der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ist.

Um zu ermitteln, welche Bedeutung der Parameter α hat, betrachten wir die Figur, in welcher AOB ein Hyperbelsektor, die Tangente in M parallel $[AB]$ ist. Man kann durch Parallelprojektion erreichen, daß in der projizierten Figur $[OM]\perp[AB]$ ist; dann ist also $[OM]$ die Hauptachse und Sektor AOM = Sektor MOB. Infolgedessen findet dies auch vor der Projektion statt, da bei Parallelprojektion alle Flächen sich nur in demselben Verhältnis ändern. Nun folgt aus S. 48, 49, wenn man die Gerade $[IJ]$ ins Unendliche verlegt, so daß $[OI]$, $[OJ]$ die Asymptoten werden, daß

$$O(IJAM)=O(IJMB)$$

ist. Bei gegebenem A ist der Punkt B eindeutig bestimmt sowohl durch die Größe des Sektors $\widehat{AOB}$ als auch durch das Doppelverhältnis $O(IJAB)$. Wir können daher

$$O(IJAB)=q^{F(\widehat{AOB})}$$

setzen, wo F eine zu bestimmende Funktion des Sektors $\widehat{AOB}$ und q eine positive Zahl ist. Nun ist

$$\widehat{AOB}=\widehat{AOM}+\widehat{MOB}$$

und

$$O(IJAB)=O(IJAM)\cdot O(IJMB),$$

also

$$F(\widehat{AOM}+\widehat{MOB})=F(\widehat{AOM})+F(\widehat{MOB}),$$

woraus, wie S. 39 geschlossen wird, daß F eine *lineare* Funktion ist.[1]) Fällt B mit A zusammen, so wird $\widehat{AOB} = 0$, und $O(IJAB) = 1$; daraus folgt, daß $F(0) = 0$ ist. Demnach ist $F(\widehat{AOB}) = c \cdot \widehat{AOB}$, wo c eine Konstante ist, die aber mit Rücksicht auf die Willkürlichkeit von q gleich vier genommen werden kann.

Die gleichachsige Hyperbel vom Halbmesser 1 geht durch affine Transformation (oder zwei Parallelprojektionen) in die Hyperbel mit den Halbmessern a, b über. Flächen werden dabei im Verhältnis von $1 : ab$ verändert. Der dem Sektor $\widehat{AOB}$ der gegebenen Hyperbel entsprechende Sektor der „Einheitshyperbel" sei gleich $\frac{1}{2}\alpha$, also der Sektor $\widehat{AOB}$ selbst gleich $\frac{ab}{2}\alpha$. Wir können uns weiterhin auf die Einheitshyperbel beschränken. Es ist

$$O(IJAB) = q^{2\alpha},$$

wenn

$$\widehat{AOB} = \frac{1}{2}\alpha$$

ist. Die Basis q ist also derjenige Wert des Doppelverhältnisses, für den der Sektor $\widehat{AOB}$ den Wert $\frac{1}{4}$ hat. Ist jetzt A der Scheitel $(x = 1,\ y = 0)$, B ein dem A nahe gelegener Punkt, $\angle BOA = \frac{1}{2}\xi$, so ist $OB \doteq 1$, also Sektor $\widehat{BOA} \doteq \frac{\xi}{4}$ und

$$O(IJAB) = \frac{\sin 45^0}{-\sin 45^0} : \frac{\sin\left(45^0 - \frac{\xi}{2}\right)}{-\sin\left(45^0 + \frac{\xi}{2}\right)} = \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{\xi}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\xi}{2}} \doteq \frac{1 + \frac{1}{2}\xi}{1 - \frac{1}{2}\xi} \doteq 1 + \xi.$$

Also ist

$$1 + \xi \doteq q^{\xi},$$

und zwar um so genauer, je kleiner ξ, d. h. es ist

$$q = \lim_{\xi = 0} (1 + \xi)^{\frac{1}{\xi}}$$

das ist aber (s. o. S. 230) die definierende Eigenschaft der Zahl e. Demnach ist

$$e^{2\alpha} = O(IJAB),$$

wenn der Sektor $\widehat{AOB} = \frac{1}{2}\alpha$ ist.

---

1) F ist stetig, da mit $B \doteq A$ auch $O(IJAB) \doteq 1$, also $F(\widehat{AOB}) \doteq 0$ wird. Über die unstetigen Lösungen s. G. Hamel, Math. Ann. 60 (1905), p. 459.

Ist jetzt A der Scheitel $(x = 1,\ y = 0)$, B der Punkt (x, y), mit $x > y > 0$, so liefert die Ordinate von B das Doppelverhältnis:

$$O(IJAB) = \frac{x}{-x} : \frac{x-y}{-x-y} = \frac{x+y}{x-y} = e^{2\alpha},$$

andererseits ist

$$(x+y)(x-y) = 1,$$

also folgt

$$x + y = e^{\alpha}$$

$$x - y = e^{-\alpha},$$

da $x + y$ und $x - y$ beide positiv sind. Also ist für diesen Zweig der Hyperbel:

$$x = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} = \cos \operatorname{hyp} \alpha,$$

$$y = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} = \sin \operatorname{hyp} \alpha,$$

wenn $\frac{1}{2}\alpha$ der Sektor $\widehat{AOB}$ ist. Und für die Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ haben wir ebenso

$$x = a \cos \operatorname{hyp} \alpha$$

$$y = b \sin \operatorname{hyp} \alpha,$$

wenn $\frac{ab}{2}\alpha$ der Sektor $\widehat{AOB}$ ist.

Aus $e^{\alpha} e^{\beta} = e^{\alpha+\beta}$ folgen noch für cos hyp und sin hyp die Formeln des *Additionstheorems*:

$$\cos \operatorname{hyp} (\alpha + \beta) = \cos \operatorname{hyp} \alpha \cos \operatorname{hyp} \beta + \sin \operatorname{hyp} \alpha \sin \operatorname{hyp} \beta$$

$$\sin \operatorname{hyp} (\alpha + \beta) = \sin \operatorname{hyp} \alpha \cos \operatorname{hyp} \beta + \cos \operatorname{hyp} \alpha \sin \operatorname{hyp} \beta;$$

und wenn man

$$\frac{\sin \operatorname{hyp} \alpha}{\cos \operatorname{hyp} \alpha} = \operatorname{tg} \operatorname{hyp} \alpha$$

setzt:

$$\operatorname{tg} \operatorname{hyp} (\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \operatorname{hyp} \alpha + \operatorname{tg} \operatorname{hyp} \beta}{1 + \operatorname{tg} \operatorname{hyp} \alpha \operatorname{tg} \operatorname{hyp} \beta}.$$

Diese Additionstheoreme gehen aus den oben (S. 230) für Potenzsummen angegebenen hervor, wenn man

$$a^n = e^{\alpha}, \quad a'^n = e^{-\alpha}, \quad b^n = e^{\beta}, \quad b'^n = e^{-\beta}$$

setzt.

Logarithmenreihe.

Es wird

$$\lim_{n=0} \frac{(1+x)^n - 1}{n} = \lim_{n=0} \left(x + \frac{(n-1)}{1\cdot 2} x^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} x^3 + \cdots \right)^{1)}$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots;$$

das werde mit $\lambda(1+x)$ bezeichnet. Diese Reihe konvergiert für $|x| < 1$ [2]; denn dann ist

$$|x| + \frac{|x|^2}{2} + \frac{|x|^3}{3} + \cdots < |x| + |x|^2 + |x|^3 + \cdots$$

also $< \frac{|x|}{1-|x|}$. Für die Funktion λ ist

$$\lambda(1+x) + \lambda(1+y) = \lambda(1+x+y+xy),$$

falls auch $|x+y+xy| < 1$ ist.

Wir beweisen diese Relation, indem wir zeigen, daß in der Gleichung:

$$(x+y) - \frac{x^2+y^2}{2} + \frac{x^3+y^3}{3} + \cdots {}^{3)}$$
$$= (x+y+xy) - \frac{(x+y+xy)^2}{2} + \frac{(x+y+xy)^3}{3} - \cdots$$

die Koeffizienten gleich hoher Glieder übereinstimmen. Dazu benutzen wir die bereits auf S. 219 eingeführten Größen:

$$s = x + y,$$
$$p = xy,$$
$$s_h = x^h + y^h.$$

In diesen lautet die zu beweisende Gleichung:

$$s - \frac{s_2}{2} + \frac{s_3}{3} - \cdots = (s+p) - \frac{(s+p)^2}{2} + \frac{(s+p)^3}{3} - \cdots$$

oder wenn wir auf die linke Seite die auf S. 220 abgeleitete Relation

$$s_n = s^n - \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} s^{n-2} p + \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} s^{n-4} p^2 - \cdots$$

anwenden:

$$s - \frac{1}{2}\left(s^2 - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} p\right) + \frac{1}{3}\left(s^3 - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} sp\right) - \frac{1}{4}\left(s^4 - \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} s^2 p + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} p^2\right) + \cdots$$
$$= (s+p) - \frac{(s+p)^2}{2} + \frac{(s+p)^3}{3} - \cdots$$

1) Die Berechtigung zur Vertauschung der Grenzübergänge erhellt wie oben S. 230.

2) Über ihre Konvergenz bei $x = 1$ s. weiter unten.

3) Die Addition zweier *konvergenter* Reihen darf durch Addition ihrer Glieder vollzogen werden, wie sich sofort durch Vergleich der Reste ergibt.

oder[1]):

$$\left\{s+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}p\right\}-\left\{\frac{1}{2}s^2+\frac{1}{3}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}sp+\frac{1}{4}\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}p^2\right\}$$

$$+\left\{\frac{1}{3}s^3+\frac{1}{4}\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}s^2p+\frac{1}{5}\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}sp^2+\frac{1}{6}\begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}p^3\right\}$$

$$\cdots\pm\left\{\frac{1}{h}s^h+\frac{1}{h+1}\begin{bmatrix}h+1\\1\end{bmatrix}s^{h-1}p+\frac{1}{h+2}\begin{bmatrix}h+2\\2\end{bmatrix}s^{h-2}p^2+\cdots\right\}\mp\cdots$$

$$\cdots=(s+p)-\frac{(s+p)^2}{2}+\frac{(s+p)^3}{3}-\cdots.$$

Daraus folgt durch Vergleichung der Koeffizienten von $s^{h+k}p^k$

$$\frac{1}{h+k}\begin{bmatrix}h+k\\k\end{bmatrix}=\frac{1}{h}\binom{h}{k},$$

und das ist richtig, denn aus

$$\begin{bmatrix}h+k\\k\end{bmatrix}=\frac{(h+k)(h-1)(h-2)\cdots(h-k+1)}{k!}$$

folgt

$$\frac{1}{h+k}\begin{bmatrix}h+k\\k\end{bmatrix}=\frac{(h-1)(h-2)\cdots(h-k+1)}{k!}=\frac{1}{h}\binom{h}{k};$$

die oben eingeführte Funktion λ besitzt also in der Tat die Fundamentaleigenschaft, daß

$$\lambda(1+x)+\lambda(1+y)=\lambda(1+x+y+xy)$$

ist.

Daraus folgt für jede positive ganze Zahl n

$$n\lambda(1+x)=\lambda((1+x)^n)$$

oder wenn $\frac{x}{n}$ für x gesetzt wird

$$\lambda\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)=n\lambda\left(1+\frac{x}{n}\right).$$

Geht man zur Grenze $n=\infty$ über, so ergibt sich, wegen $\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$ und $\lim\, n\lambda\left(1+\frac{x}{n}\right)=\lim\left(x-\frac{x^2}{2n}+\frac{x^3}{3n^2}-\cdots\right)=x$, daß

$$\lambda(e^x)=x$$

ist. Durch die Gleichung $e^x=y$ wird jedem reellen Werte von x ein reeller positiver Wert von y *eindeutig* zugeordnet, da mit wach-

---

1) Diese Umordnung der Glieder ist zulässig, wenn auch die Summe ihrer absoluten Werte konvergiert, wenn also $\sum\frac{|x|^h}{h}$ für jede Wurzel von $x=|s|+\frac{|p|}{x}$ konvergiert, d. h. wenn $|s|+|p|<1$ ist. Nach Erkenntnis der Funktion λ wird diese Einschränkung bedeutungslos.

sendem x auch e^x wächst (denn $e^{x+\xi} = e^x e^\xi$ und $e^\xi = 1 + \xi + \cdots > 1$) und dadurch wird der *natürliche Logarithmus* x der Zahl y definiert. Also ist

$$\lambda(y) = \log \operatorname{nat} y \text{ (kürzer mit } \ln y \text{ bezeichnet)},$$

d. h. die Funktion λ stimmt für diejenigen Argumente, für die sie definiert ist, mit der Funktion log nat überein, und es ist also[1])

$$\log \operatorname{nat}(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \text{ wenn } |x| < 1.^{2)}$$

Wir folgern noch:

$$-\log \operatorname{nat}(1 - x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots$$

und durch Addition

$$\frac{1}{2} \log \operatorname{nat} \frac{1 + x}{1 - x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$$

Da man links für $x = \operatorname{tg} \operatorname{hyp} \alpha$ erhält $\frac{1}{2} \log \operatorname{nat} e^{2\alpha} = \alpha$, so kann man auch schreiben $\operatorname{arctg} \operatorname{hyp} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$.

Anwendung auf die Wurzelpotenzsummen.

Sind $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ die Wurzeln von

$$x^n - p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} - \cdots = 0 \text{ und } s_h = x_1^h + x_2^h + \cdots x_n^h,$$

so wird für eine Variable t, für die $|p_1 t + p_2 t^2 + \cdots| < 1$, $|x_1 t| < 1$, $|x_2 t| < 1$, usw. ist, identisch:

$$1 + p_1 t + p_2 t^2 + \cdots = (1 + x_1 t)(1 + x_2 t) \cdots (1 + x_n t) =$$

$$e^{\Sigma \ln(1 + x_r t)} = e^{\left(\Sigma(x_r t - \frac{(x_r t)^2}{2} + \frac{(x_r t)^3}{3} - \cdots\right)} = e^{\left(s_1 t - \frac{s_2 t^2}{2} + \frac{s_3 t^3}{3} + \cdots\right)}$$

also:

$$s_1 t - s_2 \frac{t^2}{2} + s_3 \frac{t^3}{3} - \cdots = \ln(1 + p_1 t + p_2 t^2 + \cdots)$$

$$= (p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 + \cdots) - \frac{(p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 + \cdots)^2}{2} + \cdots.$$

---

1) Durch Integralbetrachtungen bewiesen von Nicolaus Mercator, Logarithmotechnia (London 1668), abgedruckt bei Maseres, Scriptores logarithmici; elementar abgeleitet von Edmond Halley, Phil. Trans. 1695, p. 60; ebenso von Euler, Introd., p. 88, strenger von Cauchy, Anal. alg., p. 167.

2) Man kann die Formel

$$\lg \operatorname{nat}(1 + x) = \lim \frac{(1 + x)^{\frac{1}{n}} - 1}{n}$$

auch für große, aber endliche n als *Näherungs*formel zur Berechnung der Logarithmen benutzen, wie dies F. Maseres tut: Phil. Trans., 68 (Lond. 1778), p. 895.

Hieraus ergibt sich durch Koeffizientenvergleichung die Formel[1]):

$$(-1)^m \frac{s_m}{m} = \sum_{\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+\cdots=m} (-1)^{m-1} \frac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots-1)!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!\cdots} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3}\cdots$$

Diese Formel ist zwar zunächst nur für reelle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ hergeleitet worden, weil die Gültigkeit der Reihen für e^x und $\ln(1+x)$ erst später für imaginäre Argumente bewiesen werden kann. Nun sind aber offenbar diese Formeln Identitäten, wenn man in ihnen für $s_m, p_1, p_2, p_3, \ldots$ ihre Ausdrücke in den x einsetzt, infolgedessen gelten sie auch für imaginäre Größen $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Die Formel:

$$1 + p_1 t + p_2 t^2 + \cdots = e^{s_1 t - s_2 \frac{t^2}{2} + s_3 \frac{t^3}{3} - \cdots}$$

mit

$$s_1 = p_1$$
$$s_2 = p_1^2 - 2p_2$$
$$s_3 = p_1^3 - 3p_1p_2 + 3p_3 \text{ usw.}$$

und

$$p_1 = s_1$$
$$p_2 = \frac{s_1^2}{2} - \frac{s_2}{2}$$
$$p_3 = \frac{s_1^3}{6} - \frac{s_1 s_2}{2} + \frac{s_3}{3} \text{ usw.}$$

ist von der Bedeutung der s_i als Potenzsummen und der p_i als elementar-symmetrischer Funktionen unabhängig. Man kann sie zum Multiplizieren, Potenzieren usw. von Potenzreihen benutzen. Setzt man $s_1 = p$, $s_2 = p\alpha$, $s_3 = p\beta, \ldots$, also:

$$p_1 = p,\ p_2 = \frac{p^2 - p\alpha}{2},\ p_3 = \frac{p^3 - 3p^2\alpha + 2p\beta}{6},$$

usw., so haben diese Funktionen von p die Eigenschaften der Binomialkoeffizienten:

$$(p+q)_h = p_h + p_{h-1}q_1 + \cdots + p_1 q_{h-1} + q_h,$$

und es wird

$$1 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots = (1 + 1_1 x + 1_2 x^2 + \cdots)^p.$$

Die Annahme $\alpha = \beta = \gamma = \cdots = 0$ gibt:

$$1 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots = e^{px};$$

die Annahme $\alpha = \beta = \gamma \cdots = 1$ gibt:

$$1 + \binom{p}{1} x + \binom{p}{2} x^2 + \cdots = (1+x)^p; \text{ usw.}$$

1) Waring, Meditationes algebraicae, ed. 3 (Cambridge 1770), p. 1.

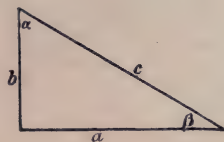
Kapitel III.

Goniometrie.

Definitionen. Relationen. Additionstheorem.

Wir definieren die goniometrischen Funktionen durch die Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck:

$$(1) \qquad \begin{cases} \sin\alpha = \frac{a}{c}, & \operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a} \\ \sec\alpha = \frac{c}{b}, & \cos\alpha = \frac{b}{c} \\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}, & \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}. \end{cases}$$



Dann ist in diesem System das Produkt der Elemente jeder Zeile oder Kolonne identisch gleich Eins, also:

$$\sin\alpha \ \operatorname{cosec}\alpha = 1$$
$$\sec\alpha \cos\alpha = 1$$
$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1$$
$$\sin\alpha \sec\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1$$
$$\operatorname{cosec}\alpha \cos\alpha \operatorname{tg}\alpha = 1.$$

Demnach ist jede Funktion *rational* durch sin und cos ausdrückbar. Ferner folgt aus $a^2 + b^2 - c^2 = 0$ durch Division mit bzw. a^2, b^2, c^2:

$$\operatorname{cosec}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha = 1$$
$$\sec^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha = 1$$
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Demnach ist das Quadrat jeder Funktion durch das Quadrat jeder anderen *rational* ausdrückbar, und zwar sind:

$$\sin^2, \cos^2, -\operatorname{tg}^2, -\operatorname{ctg}^2, \sec^2, \operatorname{cosec}^2$$

die 6 Werte eines Doppelverhältnisses (S. 2).

Der Ptolemäische Satz: „Produkt der Diagonalen eines Kreisvierecks gleich der Summe der Produkte gegenüberliegender Seiten“, angewandt auf zwei rechtwinklige Dreiecke mit Hypothenusen gleich Eins, liefert, indem man die Dreiecke auf vier verschiedene Arten mit ihren Hypothenusen zur Deckung bringt, die vier Formeln des „*Additionstheorems*“:

1) Almagest ed. Heiberg, p. 36.

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Bis hierher sind die Funktionen nur für positive spitze Winkel erklärt worden. Aus dem Additionstheorem folgt für $\alpha = 0$:

$$\sin(-\beta) = -\sin\beta,$$

$$\cos(-\beta) = \cos\beta;$$

was nunmehr allgemein gelten soll; dadurch sind sin und cos, also auch die übrigen Funktionen für negative spitze Winkel erklärt.

Außerdem soll die für spitze Winkel offenbar geltende Formel:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$

allgemein gelten. Damit ist es möglich, sin und cos für beliebig große positive oder negative Winkel zu definieren.

In der Tat ergibt sich:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha,$$

und daraus folgt allgemein, daß $\sin\left(\alpha + k\frac{\pi}{2}\right)$ für gerades k gleich $(-1)^{\frac{k}{2}}\sin\alpha$, für ungerades k gleich $(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}\cos\alpha$ ist; ebenso, daß $\cos\left(\alpha + k\frac{\pi}{2}\right)$ für gerades k gleich $(-1)^{\frac{k}{2}}\cos\alpha$, für ungerades k gleich $(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}\sin\alpha$ ist. Daraus ergibt sich die Richtigkeit der Formeln des Additionstheorems für beliebig große positive oder negative Winkel, wie folgt:

Zunächst gelten die Formeln für positive spitze Winkel α und β und mit Rücksicht auf

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \text{ und } \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

für positive und negative spitze Winkel. Nun können zwei beliebige Winkel A und B stets in der Form angenommen werden:

$$A = \alpha + k\pi,$$

$$B = \beta + h\pi,$$

wo α und β positive oder negative spitze Winkel, h und k ganze Zahlen sind. Also ist:

$$\sin A = (-1)^k \sin\alpha, \quad \sin B = (-1)^h \sin\alpha,$$
$$\cos A = (-1)^k \cos\alpha, \quad \cos A = (-1)^h \cos\alpha,$$

woraus die Gültigkeit des Additionstheorems für beliebige Winkel folgt.

Summations- und Multiplikationsformeln.

Aus dem Additionstheorem ergeben sich die folgenden *Summationsformeln*[1]):

$$\sin(x_1 + x_2) = (\operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2)\cos x_1 \cos x_2;$$
$$\cos(x_1 + x_2) = (1 - \operatorname{tg} x_1 \operatorname{tg} x_2)\cos x_1 \cos x_2;$$
$$\sin(x_1 + x_2 + x_3) = (\operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2 + \operatorname{tg} x_3 - \operatorname{tg} x_1 \operatorname{tg} x_2 \operatorname{tg} x_3)\cos x \cos x_2 \cos x_3;$$
$$\cos(x_1 + x_2 + x_3) = (1 - \sum \operatorname{tg} x_1 \operatorname{tg} x_2)\cos x_1 \cos x_2 \cos x_3;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

daraus folgen durch den Schluß von $n-1$ auf n die allgemeinen Formeln[2]):

$$\sin\left(\sum x\right) = \left(\sum \operatorname{tg} x - \sum \operatorname{tg} x_1 \operatorname{tg} x_2 \operatorname{tg} x_3 + \cdots\right)\prod \cos x;$$
$$\cos\left(\sum x\right) = \left(1 - \sum \operatorname{tg} x_1 \operatorname{tg} x_2 + \sum \operatorname{tg} x_1 \operatorname{tg} x_2 \operatorname{tg} x_3 \operatorname{tg} x_4 - \cdots\right)\prod \cos x$$

und:

$$\operatorname{tg}\left(\sum x\right) = \frac{\sum \operatorname{tg} x - \sum \operatorname{tg} x_1 \operatorname{tg} x_2 \operatorname{tg} x_3 + \cdots}{1 - \sum \operatorname{tg} x_1 \operatorname{tg} x_2 + \sum \operatorname{tg} x_1 \operatorname{tg} x_2 \operatorname{tg} x_3 \operatorname{tg} x_4 - \cdots}.$$

Hieraus ergeben sich insbesondere für $x_1 = x_2 = \cdots x_n = x$ die *Multiplikationsformeln:*

$$\sin nx = \cos^n x\left(n \operatorname{tg} x - \binom{n}{3}\operatorname{tg}^3 x + \binom{n}{5}\operatorname{tg}^5 x - \cdots\right)^{3)}$$
$$\cos nx = \cos^n x\left(1 - \binom{n}{2}\operatorname{tg}^2 x + \binom{n}{4}\operatorname{tg}^4 x - \cdots\right)$$
$$\operatorname{tg} nx = \frac{n \operatorname{tg} x - \binom{n}{3}\operatorname{tg}^3 x + \binom{n}{5}\operatorname{tg}^5 x - \cdots}{1 - \binom{n}{2}\operatorname{tg}^2 x + \binom{n}{4}\operatorname{tg}^4 x - \cdots}.^{4)}$$

---

1) Jakob Hermann, Acta Erud. 1706, p. 256, Joh. Bernoulli, ib. 1722, p. 361 = Opera II, p. 526.

2) Die Summen- und Produktzeichen beziehen sich auf alle dem hingeschriebenen Gliede analog zu bildenden Glieder.

3) Vieta, Opera ed. Schooten, p. 37; Joh. Bernoulli, Acta erud. 1701, p. 170 = Opera, p. 386; Chr. Wolf, Acta erud. 1707, p. 313.

4) F. de Lagny (1660—1734), Hist. et Mém. de Paris 1705, p. 256; J. Hermann, l. c.; Joh. Bernoulli, Acta erud. 1712, p. 274 = Opera I, p. 511.

Der Moivresche Satz.[1])

Es folgt aus dem Additionstheorem:

$$(\cos x_1 + i \sin x_1)(\cos x_2 + i \sin x_2) = (\cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2) + i(\cos x_1 \sin x_2 + \sin x_1 \cos x_2) = \cos(x_1 + x_2) + i \sin(x_1 + x_2)$$

also allgemeiner:

$$(\cos x_1 + i \sin x_1)(\cos x_2 + i \sin x_2) \cdots (\cos x_n + i \sin x_n) = \cos(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + i \sin(x_1 + x_2 \cdots + x_n). \tag{1}$$

Daraus folgt für $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$:

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx. \tag{2}$$

Das ist die *Moivresche Formel*[2]); sie ist zunächst nur für ganzes positives n bewiesen. Durch Vergleichung des imaginären und reellen Teiles in den Formeln (1) und (2) ergeben sich die oben aus derselben Quelle, dem Additionstheorem, gefundenen Summations- und Multiplikationsformeln.

Nun wird nach dem Moivreschen Satz:

$$\left[\cos\left(\frac{mx + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{mx + 2k\pi}{n}\right)\right]^n = \cos mx + i \sin mx = (\cos x + i \sin x)^m,$$

also ist:

$$(\cos x + i \sin x)^{\frac{m}{n}} = \cos \frac{mx + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{mx + 2k\pi}{n}$$

für jeden ganzzahligen Wert von k, so daß man für $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ genau n Werte dieser n^{ten} Wurzel bekommt, also sind dies alle. Da man jede komplexe Zahl $a + ib$ vermittels $a = r \cos \varphi$, $b = r \sin \varphi$, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, in die Form $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ bringen kann, so wird dadurch die Ausziehung der n^{ten} Wurzel aus einer komplexen Zahl durch die aus einer reellen und die n-Teilung eines Winkels vermittelt.

Nunmehr ist die Richtigkeit der Formel:

$$(\cos x + i \sin x)^p = \cos px + i \sin px$$

für negative und irrationale Werte des Exponenten p zu beweisen. Es ist:

$$(\cos x + i \sin x)^p (\cos x + i \sin x)^{-p} = 1$$

und

$$(\cos px + i \sin px)(\cos(-px) + i \sin(-px)) = (\cos^2 px + \sin^2 px) = 1,$$

so daß die zu beweisende Formel für jeden negativen Exponenten gilt, wenn sie für den entsprechenden positiven richtig ist. Bei ir-

---

1) Über dessen Entdeckungsgeschichte vgl. v. Braunmühl, Bibliotheca mathematica 2 (1901), p. 97.

2) Phil. Trans. 309 (1707), p. 2368; Miscellanea analytica 1730.

rationalen Exponenten ist vor allen Dingen die Bedeutung einer solchen Potenz mit komplexer Basis festzustellen. Die Definition hat ähnlich wie bei der Definition für reelle Basis auf Grund der Stetigkeit zu erfolgen. Der *Haupt*wert von $(\cos x + i \sin x)^p$ wird durch die Forderung definiert, daß diese Funktion von p stetig ist.[1]) Demnach muß der Quotient $\frac{(\cos x + i \sin x)^p}{(\cos x + i \sin x)^{p'}}$ der 1 beliebig nahe kommen, wenn p' ein beliebig naher rationaler Näherungswert von p ist.

Angenommen, es wäre jetzt $(\cos x + i \sin x)^p = (\cos px + i \sin px)\Delta$, so müßte also

$$\frac{(\cos x + i \sin x)^p}{(\cos x + i \sin x)^{p'}} = (\cos x + i \sin x)^p (\cos x + i \sin x)^{-p'}$$
$$= (\cos (p - p')x + i \sin (p - p')x)\Delta$$

der 1 beliebig nahe kommen, indem man für p' einen beliebig nahen rationalen Näherungswert von p setzt, was bei $\Delta \neq 1$ offenbar unmöglich ist; denn dann wird $\sin (p - p')x \doteq 0$, $\cos (p - p')x \doteq 1$, also:

$$(\cos(p - p')x + i \sin(p - p')x)\Delta \doteq \Delta.$$

Ausdehnung des binomischen Satzes auf komplexe Basis.[2])

Setzen wir:

$$\left(1 - \binom{p}{2} \operatorname{tg}^2 x + \binom{p}{4} \operatorname{tg}^4 x - \cdots\right) \cos^p x = c_p, \tag{1}$$

$$\left(\binom{p}{1} \operatorname{tg} x - \binom{p}{3} \operatorname{tg}^3 x + \cdots\right) \cos^p x = s_p, \tag{2}$$

so haben wir oben (S. 241) die Richtigkeit der beiden Gleichungen:

$$\cos px = c_p,$$
$$\sin px = s_p$$

für positive ganze Zahlen p bewiesen. Die Gültigkeit dieser Formeln soll nunmehr für beliebige reelle p und $|x| < \frac{\pi}{4}$ bewiesen werden. Die beiden Reihen c_p und s_p sind offenbar konvergent für:

$$|\operatorname{tg} x| < 1,$$

da dann die Summe der absoluten Werte der Glieder beider Reihen $(1 + |\operatorname{tg} x|)^p$ gibt.

---

1) Gewöhnlich definiert man: $f(x)$ ist stetig, wenn $x' \doteq x$ so gewählt werden kann, daß $f(x) - f(x')$ beliebig $\doteq 0$ wird. In vielen Fällen, wie auch oben, ist nicht diese *additive*, sondern die *multiplikative* Definition vorzuziehen: $f(x)$ ist stetig, wenn $x' \doteq x$ so gewählt werden kann, daß $\frac{f(x)}{f(x')}$ beliebig $\doteq 1$ wird.

2) Diese Ausdehnung vollzog zuerst Cauchy, Anal. alg., p. 296.

Jetzt ergeben sich mit Rücksicht auf S. 225 (4) die Formeln:

$$c_p c_q - s_p s_q = c_{p+q}, \tag{3}$$

$$s_p c_q + s_q c_p = s_{p+q}, \tag{4}$$

$$c_p c_q + s_p s_q = c_{p-q}, \tag{5}$$

$$s_p c_q - c_p s_q = s_{p-q}, \tag{6}$$

speziell noch für $q = p$:

$$s_p^{\,2} + c_p^{\,2} = 1. \tag{7}$$

Aus (3) und (4) folgt für $q = -p$:

$$c_p c_{-p} - s_p s_{-p} = 1,$$

$$c_p s_{-p} + c_{-p} s_p = 0$$

und daraus, indem man einmal c_p, das andere Mal s_p eliminiert:

$$c_p(c_{-p}^2 + s_{-p}^2) = c_{-p},$$

$$s_p(c_{-p}^2 + s_{-p}^2) = -s_{-p};$$

also:

$$c_p = c_{-p}, \quad s_p = -s_{-p}.$$

Ist also für p bewiesen:

$$c_p = \cos px, \quad s_p = \sin px,$$

so folgt, daß auch:

$$c_{-p} = \cos(-px),$$

$$s_{-p} = \sin(-px)$$

ist, also die Gültigkeit der Formeln für negatives p. Demnach können wir weiterhin p positiv annehmen.

Nun folgen aus (3), (4) die Formeln:

$$c_{np} = c_p^n - \binom{n}{2} c_p^{n-2} s_p^2 + \cdots,$$

$$s_{np} = \binom{n}{1} c_p^{n-1} s_p - \binom{n}{3} c_p^{n-3} s_p^3 + \cdots,$$

wenn n eine positive ganze Zahl bedeutet. Die Richtigkeit dieser Formeln folgt durch den Schluß von n auf $n+1$ vermittels:

$$c_{(n+1)p} = c_{np} c_p - s_{np} s_p,$$

$$s_{(n+1)p} = s_{np} c_p + c_{np} s_p.$$

Daraus folgt für $np = m$, wenn auch m eine positive ganze Zahl ist:

$$(c_p + i s_p)^n = c_m + i s_m = (\cos x + i \sin x)^m.$$

Also ist $c_p + i s_p$ einer der Werte von

$$(\cos x + i \sin x)^{\frac{m}{n}},$$

also:

$$c_{\frac{m}{n}} = \cos \frac{mx + 2k\pi}{n}; \quad s_{\frac{m}{n}} = \sin \frac{mx + 2k\pi}{n}.$$

Aber für kleine Werte von x wird:

$$c_{\frac{m}{n}} \doteq 1,$$

$$s_{\frac{m}{n}} \doteq 0,$$

folglich muß für kleine Werte von x, also wegen der Stetigkeit allgemein:

$$c_{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m}{n}x,$$

$$s_{\frac{m}{n}} = \sin\frac{m}{n}x$$

sein. Für $q \doteq 0$ ist $c_q \doteq 1$ und $s_q \doteq 0$, also folgt aus (3), wenn s_p und c_p desselben Zeichens sind, daß mit wachsendem p $|c_p|$ abnimmt, also wegen (7) $|s_p|$ wächst; und aus (4), wenn s_p und c_p konträren Zeichens sind, daß mit wachsendem p $|s_p|$ abnimmt, also $|c_p|$ wächst. Es seien jetzt $p' > p$, $p'' < p$ alle rationalen Zahlen eines Intervalles, in welchem $s_p c_p$ sein Zeichen nicht wechselt. Durch die Forderung, zwischen den Zahlen $c_{p'} = \cos p'x$ einerseits und den Zahlen $c_{p''} = \cos p''x$ andererseits zu liegen, wird sowohl c_p als $\cos px$ *eindeutig* definiert, da es sich um eine *dichte* Menge handelt; demnach ist $c_p = \cos px$ und ebenso $s_p = \sin px$.

Die beiden für beliebige reelle p und $|\sin x| < \cos x$ bewiesenen Gleichungen:

$$\cos px = \left(1 - \binom{p}{2}\operatorname{tg}^2 x + \cdots\right)\cos^p x,$$

$$\sin px = \left(\binom{p}{1}\operatorname{tg} x - \binom{p}{3}\operatorname{tg}^3 x + \cdots\right)\cos^p x$$

ergeben jetzt:

$$\cos px + i\sin px = \cos^p x\left\{1 + i\binom{p}{1}\operatorname{tg} x - \binom{p}{2}\operatorname{tg}^2 x \cdots\right\}$$

$$= \cos^p x + i\binom{p}{1}\cos^{p-1}x\sin x - \binom{p}{2}\cos^{p-2}x\sin^2 x\cdots,$$

d. h. für $(\cos x + i\sin x)^p$ gilt der binomische Satz, wenn

$$|\sin x| < \cos x$$

und p eine beliebige reelle Zahl ist. Demnach gilt der Satz auch für $(a+ib)^p$, wenn $|b| < a$ und p eine beliebige reelle Zahl ist.

Die interszendenten Operationen mit komplexen Zahlen.

Der Ausdruck:

$$\lim_{n=\infty}\left(1 + i\frac{z}{n}\right)^n = 1 - \frac{z^2}{2!} + \cdots + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \cdots\right) = \cos z + i\sin z$$

soll als *Definition* der Potenz e^{iz} mit rein imaginärem z genommen werden. Diese Definition ist zulässig, weil die Potenzgesetze erhalten bleiben, denn es wird in der Tat:

$$\left.\begin{array}{l} e^{ix}\,e^{iy} = e^{i(x+y)} \\ (e^{ix})^n = e^{inx} \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{nach dem Additionstheorem}\\ \text{und dem Moivreschen Satz.}\end{array}$$

Die Potenz a^{ix} wird definiert durch $e^{ix}\cdot \ln a$. Dann gelten in der Tat die Potenzgesetze:

$$a^{ix}\,b^{ix} = (ab)^{ix}$$
$$(a^{ix})^n = a^{nix}$$

für beliebige reelle n. Ferner ist: $a^{\varrho + i\varphi}$ zu definieren durch $a^{\varrho}\cdot a^{i\varphi}$, woraus z. B.:

$$a + ib = \sqrt{a^2+b^2}\, e^{i \operatorname{arctg} \frac{b}{a}} = e^{\frac{1}{2}\ln(a^2+b^2) + i \operatorname{arctg}\frac{b}{a}}$$

folgt.

Nunmehr ist die allgemeine Potenz $(a+ib)^{(c+id)}$ zu definieren durch:

$$e^{\left\{\frac{1}{2}\ln(a^2+b^2) + i\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right\}\cdot(c+id)}$$

und der allgemeine Logarithmus von $(a+ib)$ für die Basis $(c+id)$ zu definieren durch:

$$\frac{\frac{1}{2}\ln(a^2+b^2) + i\operatorname{arctg}\frac{b}{a}}{\frac{1}{2}\ln(c^2+d^2) + i\operatorname{arctg}\frac{d}{c}};$$

daß auch für diese Definitionen die Potenzgesetze bestehen bleiben, ist leicht zu zeigen.

Jetzt gilt auch die Exponentialreihe für komplexe Argumente; denn es wird:

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)\left(1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy^2)}{2!} + \cdots\right)$$
$$= 1 + \frac{(x+iy)}{1!} + \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x\,iy}{1!\,1!} + \frac{(iy)^2}{2!}\right) + \cdots$$
$$= 1 + \frac{x+iy}{1!} + \frac{(x+iy)^2}{2!} + \cdots.$$

Ferner ist:

$$\lim_{n=0}\left[\left(1 + i\frac{z}{n}\right)^n - 1\right]n = iz - \frac{(iz)^2}{2} + \frac{(iz)^3}{3} - \cdots.$$

Andererseits gilt nach Obigem:

$$\ln(1+iz) = \frac{1}{2}\ln(1+z^2) + i\operatorname{arctg} z,$$
$$= \frac{1}{2}\left[z^2 - \frac{z^4}{2} + \frac{z^6}{3} - \cdots\right] + i\left[z - \frac{z^3}{3} + \cdots\right]$$
$$= iz - \frac{(iz)^2}{2} + \frac{(iz)^3}{3} - \cdots,$$

so daß die Reihe und die Grenzwertdefinition für $\ln(1+x)$ auch für rein imaginäre x gelten.

Es wird ferner für $z = x + iy$ und $|y| < 1 + x$:

$$(1+z)^n = (1+x)^n\left(1+\frac{iy}{1+x}\right)^n = (1+x)^n\left(1+\binom{n}{1}\frac{iy}{1+x}+\cdots\right)$$

$$= (1+x)^n + \binom{n}{1}(1+x)^{n-1}iy + \cdots$$

$$= 1 + \binom{n}{1}(x+iy) + \binom{n}{2}(x^2+2xiy+(iy)^2) + \cdots{}^{1)}$$

$$= 1 + \binom{n}{1}(x+iy) + \binom{n}{2}(x+iy)^2 + \cdots.$$

Also gilt die Binomialreihe auch für komplexe Argumente und beliebige reelle Exponenten [2]; demnach auch die Grenzwertdefinitionen von e^z und $\ln(1+z)$ für komplexe z.

Multiplikationsformeln.

I. *Polynome.* [3]

Aus den früher (S. 241) abgeleiteten Formeln:

$$\left.\begin{aligned}\cos nx &= \cos^n x\left(1-\binom{n}{2}\operatorname{tg}^2 x+\binom{n}{4}\operatorname{tg}^4 x-\cdots\right)\\ \sin nx &= \cos^n x\left(n\operatorname{tg} x-\binom{n}{3}\operatorname{tg}^3 x+\binom{n}{5}\operatorname{tg}^5 x-\cdots\right.\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

sind noch Formeln herzuleiten, in denen $\cos nx$ und $\sin nx$ nur durch $\cos x$ oder nur durch $\sin x$ ausgedrückt werden. Aus dem Additionstheorem ergeben sich die rekurrenten Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\cos(n+1)x + \cos(n-1)x &= 2\cos x\cos nx,\\ \sin(n+1)x + \sin(n-1)x &= 2\cos x\sin nx.\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Setzt man:

$$2\cos nx = s_n, \qquad \frac{\sin nx}{\sin x} = t_n,$$

so lauten diese Gleichungen (2):

$$\left.\begin{aligned}s_{n+1} - s\,s_n + s_{n-1} &= 0,\\ t_{n+1} - s\,t_n + t_{n-1} &= 0.\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

1) Diese Umordnung ist wieder gestattet, wenn die Summe der absoluten Werte der Glieder konvergiert; das findet bei $|x| + |y| < 1$ statt. Tatsächlich gilt, worauf es uns hier nicht ankommt, die Formel in dem etwas weiteren Bereich $x^2 + y^2 < 1$ (s. Cauchy, l. c.).

2) In welcher Weise sie auch für komplexe Exponenten gilt, hat Abel gezeigt. Crelles J. 1 (1826), p. 311 = Oeuvres I (Christiania 1881), p. 219.

3) S. namentlich Euler, Introductio, Lagrange, Leçons sur le calcul des fonctions, Paris 1808 = Oeuvres 10, p. 113.

Außerdem ist:

$$s_0 = 2, \quad s_1 = s, \quad t_0 = 0, \quad t_1 = 1, \quad t_2 = s.$$

Also muß es möglich sein, vermittels dieser Relationen (3) allein s_n und t_n als ganze Funktionen von s darzustellen. Für die erste Rekursionsformel erhielten wir bereits früher S. 220:

$$s = s^n - \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} s^{n-2} + \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} s^{n-4} - \cdots. \tag{4}$$

Danach ist:

$$2\cos nx = (2\cos x)^n - \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} (2\cos x)^{n-2} + \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} (2\cos x)^{n-4} - \cdots. \tag{5}$$

Die zweite Rekursionsformel (3) liefert:

$$t_n = s^{n-1} - \binom{n-2}{1} s^{n-3} + \binom{n-3}{2} s^{n-5} - \cdots. \tag{6}$$

Man beweist diese Formel durch den Schluß von n auf $(n+1)$; man erhält nämlich:

$$\begin{aligned} t_{n+1} = s\,t_n - t_{n-1} = & \left\{ s^n - \binom{n-2}{1} s^{n-2} + \binom{n-3}{2} s^{n-4} - \cdots \right\} \\ & - s^{n-2} + \binom{n-3}{1} s^{n-4} + \binom{n-4}{2} s^{n-6} - \cdots \\ & = s^n - \binom{n-1}{1} s^{n-2} + \binom{n-2}{2} s^{n-4} - \cdots. \end{aligned}$$

Also ist:

$$\sin nx = \sin x \left\{ (2\cos x)^{n-1} - \binom{n-2}{1} (2\cos x)^{n-3} + \cdots \right\}.^{1)} \tag{7}$$

Aus diesen beiden Formeln für $\cos nx$ und $\sin nx$ folgt, daß für gerades n die beiden Funktionen $\cos nx$ und $\frac{\sin nx}{\cos x}$, für ungerades n die beiden Funktionen $\frac{\cos nx}{\cos x}$ und $\sin nx$ ganze Funktionen von $\sin x$ sein müssen. — Diese Formeln sollen jetzt aufgestellt und bewiesen werden:

1. für gerades n gelten die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \cos nx &= 1 - \frac{n^2}{2!} \sin^2 x + \frac{n^2(n^2 - 2^2)}{4!} \sin^4 x - \cdots \\ \frac{\sin nx}{n \sin x \cos x} &= 1 - \frac{n^2 - 2^2}{3!} \sin^2 x + \frac{(n^2 - 2^2)(n^2 - 4^2)}{5!} \sin^4 x - \cdots \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

1) Vieta, Opera ed. Schooten, p. 295, 297, 299; Joh. Bernoulli, Acta erudit. 1701, p. 170 = Opera, p. 386.

2. und für ungerades n bestehen die Formeln:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\cos nx}{\cos x} &= 1 - \frac{n^2-1^2}{2!}\sin^2 x + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{4!}\sin^4 x - \cdots \\ \frac{\sin nx}{n\sin x} &= 1 - \frac{n^2-1^2}{3!}\sin^2 x + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{5!}\sin^4 x - \cdots\text{[1]}\end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

Der Beweis für diese Formeln wird durch den Schluß von n auf $(n+1)$ geführt. Dazu führen wir zur Abkürzung folgende Schreibweise ein:

1. wenn n gerade ist, so sei:

$$\begin{Bmatrix} n \\ 0 \end{Bmatrix} = 1, \quad \begin{Bmatrix} n \\ 1 \end{Bmatrix} = n, \quad \begin{Bmatrix} n \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{n^2}{2!}$$

$$\begin{Bmatrix} n \\ 3 \end{Bmatrix} = \frac{n(n^2-2^2)}{3!}, \quad \begin{Bmatrix} n \\ 4 \end{Bmatrix} = \frac{n^2(n^2-2^2)}{4!},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

2. wenn n ungerade ist:

$$\begin{Bmatrix} n \\ 0 \end{Bmatrix} = 1, \quad \begin{Bmatrix} n \\ 1 \end{Bmatrix} = n, \quad \begin{Bmatrix} n \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{n^2-1^2}{2!}$$

$$\begin{Bmatrix} n \\ 3 \end{Bmatrix} = \frac{n(n^2-1^2)}{3!}, \quad \cdots$$

Zunächst beweist man für diese Koeffizienten leicht die folgende Formel:

$$\begin{Bmatrix} n \\ h \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n \\ h-1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n+1 \\ h \end{Bmatrix}, \tag{10}$$

wenn h mit n zugleich gerade oder ungerade ist, und wenn dies nicht der Fall ist, so gilt die Relation:

$$\begin{Bmatrix} n \\ h \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n \\ h-1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n \\ h-2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n+1 \\ h \end{Bmatrix}. \tag{10a}$$

Mit diesen Abkürzungen lauten dann die Formeln (8) und (9):

1. für gerades n:

$$\left.\begin{aligned}\cos nx &= 1 - \begin{Bmatrix} n \\ 2 \end{Bmatrix}\sin^2 x + \begin{Bmatrix} n \\ 4 \end{Bmatrix}\sin^4 x - \cdots \\ \frac{\sin nx}{\cos x} &= \begin{Bmatrix} n \\ 1 \end{Bmatrix}\sin x - \begin{Bmatrix} n \\ 3 \end{Bmatrix}\sin^3 x + \cdots\end{aligned}\right\} \tag{8a}$$

2. für ungerades n:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\cos nx}{\cos x} &= 1 - \begin{Bmatrix} n \\ 2 \end{Bmatrix}\sin^2 x + \begin{Bmatrix} n \\ 4 \end{Bmatrix}\sin^4 x - \cdots \\ \sin nx &= \begin{Bmatrix} n \\ 1 \end{Bmatrix}\sin x - \begin{Bmatrix} n \\ 3 \end{Bmatrix}\sin^3 x + \cdots\end{aligned}\right\} \tag{9a}$$

---

1) Newton, Brief an Leibniz 13. Juni 1676, Com. epist. ed. Biot-Lefort, p. 106 = Opuscula (1744), p. 315; Beweis bei De Moivre, Phil. trans. 240 (1698), p. 190.

Wir beweisen sie, wie bereits gesagt, durch den Schluß von n auf $(n+1)$:

1. *n gerade*:

Es ist:

$$\cos(n+1)x = \cos nx \cos x - \sin nx \sin x,$$

$$\frac{\cos(n+1)x}{\cos x} = \left(1 - \begin{Bmatrix} n \\ 2 \end{Bmatrix} \sin^2 x + \cdots\right) - \left(\begin{Bmatrix} n \\ 1 \end{Bmatrix} \sin^2 x - \begin{Bmatrix} n \\ 3 \end{Bmatrix} \sin^4 x + \cdots\right)$$

$$= 1 - \left(\begin{Bmatrix} n \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n \\ 2 \end{Bmatrix}\right) \sin^2 x + \left(\begin{Bmatrix} n \\ 3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n \\ 4 \end{Bmatrix}\right) \sin^4 x - \cdots,$$

also nach (10):

$$= 1 - \begin{Bmatrix} n+1 \\ 2 \end{Bmatrix} \sin^2 x + \begin{Bmatrix} n+1 \\ 4 \end{Bmatrix} \sin^4 x - \cdots$$

Ebenso ist:

$$\sin(n+1)x = \sin nx \cos x + \cos nx \sin x,$$

$$= \left(\begin{Bmatrix} n \\ 1 \end{Bmatrix} \sin x - \begin{Bmatrix} n \\ 3 \end{Bmatrix} \sin^3 x + \cdots\right)(1 - \sin^2 x)$$

$$+ \left(1 - \begin{Bmatrix} n \\ 2 \end{Bmatrix} \sin^2 x + \cdots\right) \sin x,$$

$$= \left(\begin{Bmatrix} n \\ 1 \end{Bmatrix} + 1\right) \sin x - \left(\begin{Bmatrix} n \\ 3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n \\ 1 \end{Bmatrix}\right) \sin^3 x$$

$$+ \left(\begin{Bmatrix} n \\ 5 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n \\ 4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n \\ 3 \end{Bmatrix}\right) \sin^5 x - \cdots$$

$$= \begin{Bmatrix} n+1 \\ 1 \end{Bmatrix} \sin x - \begin{Bmatrix} n+1 \\ 3 \end{Bmatrix} \sin^3 x + \cdots$$

2. *n ungerade*:

$$\cos(n+1)x = \left(1 - \begin{Bmatrix} n \\ 2 \end{Bmatrix} \sin^2 x + \begin{Bmatrix} n \\ 4 \end{Bmatrix} \sin^4 x - \cdots\right) \cos^2 x$$

$$- \left(\begin{Bmatrix} n \\ 1 \end{Bmatrix} \sin^2 x - \begin{Bmatrix} n \\ 3 \end{Bmatrix} \sin^4 x + \cdots\right)$$

$$= 1 - \left(\begin{Bmatrix} n \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n \\ 1 \end{Bmatrix} + 1\right) \sin^2 x + \left(\begin{Bmatrix} n \\ 4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n \\ 3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n \\ 2 \end{Bmatrix}\right) \sin^4 x - \cdots$$

$$= 1 - \begin{Bmatrix} n+1 \\ 2 \end{Bmatrix} \sin^2 x + \begin{Bmatrix} n+1 \\ 4 \end{Bmatrix} \sin^4 x - \cdots$$

und

$$\frac{\sin(n+1)x}{\cos x} = \left(\begin{Bmatrix} n \\ 1 \end{Bmatrix} \sin x - \begin{Bmatrix} n \\ 3 \end{Bmatrix} \sin^3 x + \cdots\right)$$

$$+ \left(\sin x - \begin{Bmatrix} n \\ 2 \end{Bmatrix} \sin^3 x + \begin{Bmatrix} n \\ 4 \end{Bmatrix} \sin^4 x - \cdots\right)$$

$$= \begin{Bmatrix} n+1 \\ 1 \end{Bmatrix} \sin x - \begin{Bmatrix} n+1 \\ 3 \end{Bmatrix} \sin^3 x + \cdots.$$

Damit sind die Formeln (8) und (9) sämtlich bewiesen.

Setzt man in (8) $2n$ für n und $\frac{x}{2}$ für x und zur Abkürzung:

$$2\sin^2\frac{x}{2} = \varepsilon \quad \text{und} \quad 1 - \cos nx = \sin \operatorname{vers} nx,$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} \sin \operatorname{vers} nx &= n^2\varepsilon - \frac{n^2(n^2-1^2)}{2!\,1\cdot 3}\varepsilon^2 + \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{3!\,1\cdot 3\cdot 5}\varepsilon^3 - \cdots \\ \frac{\sin nx}{n\sin x} &= 1 - \frac{n^2-1^2}{3!}2\varepsilon + \frac{(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{5!}(2\varepsilon)^2 - \cdots \end{aligned} \tag{11}$$

II. *Produkte.*

Wir fanden für

$$\frac{\sin nx}{\cos^n x} \quad \text{und} \quad \frac{\cos nx}{\cos^n x}$$

ganze Funktionen von $\operatorname{tg} x$. Da die Nullstellen dieser Funktionen bekannt sind, ergibt sich sofort die Zerlegung in ein Produkt.

Setzen wir $\operatorname{tg} x = t$, so ist nach S. 241:

$$\frac{\sin nx}{\cos^n x} = nt - \binom{n}{3}t^3 + \binom{n}{5}t^5 - \cdots.$$

Die linke Seite wird 0 für $x = \frac{k\pi}{n}$ oder die rechte Seite für $t = \operatorname{tg}\frac{k\pi}{n}$, wo k eine ganze Zahl bedeutet. Also ist:

$$\begin{aligned} \frac{\sin nx}{\cos^n x} &= n\operatorname{tg} x\left\{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}}\right\}\cdots\left\{1 - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2\left[\frac{n-1}{2}\right]\frac{\pi}{n}}\right\} \\ &= n\operatorname{tg} x\prod_{k=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left(1 - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2\frac{k\pi}{n}}\right), \end{aligned} \tag{1}$$

wo $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ die größte ganze in $\frac{n-1}{2}$ enthaltene Zahl bedeutet. Ebenso folgt:

$$\frac{\cos nx}{\cos^n x} = \prod_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(1 - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2\frac{(2k-1)\pi}{2n}}\right). \tag{2}$$

Analoge Produktdarstellungen[1]) ergeben sich aus den Multiplikationsformeln (8) und (9) auf S. 248, 249:

1. für gerades n:

$$\frac{\sin nx}{n\sin x\cos x} = \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{k\pi}{n}}\right) \tag{3}$$

1) Euler, Introductio, p. 220; Cauchy, Analyse algébrique, p. 556.

und:

$$\cos nx = \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{2n}}\right), \tag{4}$$

2. für ungerades n:

$$\frac{\sin nx}{n \sin x} = \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{k\pi}{n}}\right) \tag{5}$$

und:

$$\frac{\cos nx}{\cos x} = \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{2n}}\right). \tag{6}$$

Ebenso erhält man z. B.:

$$\frac{(1+x)^n - (1-x)^n}{2nx} = \prod \left(1 + \frac{x^2}{\operatorname{tg}^2 \frac{k\pi}{n}}\right)\text{[1]},$$

$$\frac{(1+x)^n + (1-x)^n}{2} = \prod \left(1 + \frac{x^2}{\operatorname{tg}^2 \frac{(2k-1)\pi}{2n}}\right),$$

Formeln, die von (1) und (2) nicht wesentlich verschieden sind.

III. *Partialbruchzerlegung.*

Wir setzen $t = \operatorname{tg} x$ und $f(t) = nt - \binom{n}{3} t^3 + \cdots$; dann wird:

$$f'(t) = n - n\binom{n-1}{2} t^2 + n\binom{n-1}{4} t^4 - \cdots = n \frac{\cos(n-1)x}{\cos^{n-1} x}.$$

Demnach:

$$\frac{1}{f(t)} = \frac{\cos^n x}{\sin nx} = \frac{1}{n \operatorname{tg} x} + \sum_{k=\pm 1}^{\pm\left[\frac{n-1}{2}\right]} \left[\frac{1}{\dfrac{n \cos \frac{(n-1)k\pi}{n}}{\cos^{n-1} \frac{k\pi}{n}}} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \frac{k\pi}{n}}\right]$$

oder, da:

$$\cos \frac{n-1}{n} k\pi = \cos k\pi \cos \frac{k\pi}{n} + \sin k\pi \sin \frac{k\pi}{n} = (-1)^k \cos \frac{k\pi}{n}$$

ist:

$$\frac{n \cos^n x}{\sin nx} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} + \sum_{k=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{2(-1)^k \cos^{n-2} \frac{k\pi}{n} \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 \frac{k\pi}{n}}. \tag{1}$$

---

[1] Euler, Introductio, p. 118.

Dieselbe Überlegung wenden wir auf die Formel an:

$$\frac{\cos nx}{\cos^n x} = 1 - \binom{n}{2} \operatorname{tg}^2 x + \cdots = \prod_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left(1 - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 \frac{(2k-1)\pi}{2n}}\right) = f(t).$$

Da hier:

$$f'(t) = -n \binom{n-1}{1} t + n \binom{n-1}{3} t^3 - \cdots = -n \frac{\sin (n-1)x}{\cos^{n-1} x},$$

ist, so wird:

$$\frac{\cos^n x}{\cos nx} = \sum_{k=\pm 1, \pm 3, \cdots} \frac{1}{\dfrac{-n \sin \frac{(n-1)k\pi}{2n}}{\cos^{n-1} \frac{k\pi}{2n}}} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \frac{k\pi}{2n}}.$$

Nun ist:

$$\sin \frac{(n-1)k\pi}{2n} = \sin \frac{k\pi}{2} \cos \frac{k\pi}{2n} - \sin \frac{k\pi}{2n} \cos \frac{k\pi}{2} = (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cos \frac{k\pi}{2n}.$$

Also wird, wenn wir in der Summe wieder je zwei Glieder zusammenfassen:

$$\frac{n \cos^n x}{\cos nx} = 2 \sum_{k=1,3,5,\cdots} \frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}} \cos^{n-2} \frac{k\pi}{2n} \operatorname{tg} \frac{k\pi}{2n}}{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 \frac{k\pi}{2n}}. \tag{2}$$

Andere Partialbruchzerlegungen ergeben sich aus den Formeln (8), (9), von S. 248, 249 für $t = \sin x$:

1. *für gerades n:*

$$\cos nx = 1 - \frac{n^2}{2!} \sin^2 x + \frac{n^2(n^2 - 2^2)}{4!} \cdot \sin^4 x - \cdots$$

$$= \prod_{k=1,3,\ldots}^{n-1} \left(1 - \frac{t^2}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n}}\right) = f(t).$$

Dann ist:

$$f'(t) = -\frac{n^2}{1!} \sin x + \frac{n^2(n^2-2^2)}{3!} \sin^3 x - \cdots = -n \frac{\sin nx}{\cos x}.$$

Also:

$$\frac{1}{\cos nx} = \sum_{k=\pm 1, \pm 3, \ldots}^{\pm(n-1)} \frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}} \cos \frac{k\pi}{2n}}{n \left(\sin x - \sin \frac{k\pi}{2n}\right)} = \sum_{k=1,3,\cdots}^{n-1} \frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}} \sin \frac{k\pi}{n}}{n \left(\sin^2 x - \sin^2 \frac{k\pi}{2n}\right)}, \tag{3}$$

2. *für ungerades n:*

$$\frac{\sin nx}{n} = \sin x - \frac{n^2-1^2}{3!}\sin^3 x + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{5!}\sin^5 x - \cdots$$

$$= \sin x \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{k\pi}{n}}\right) = f(t).$$

$$f'(t) = 1 - \frac{n^2-1^2}{2!}\sin^2 x + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{4!}\sin^4 x - \cdots = \frac{\cos nx}{\cos x}.$$

Also:

$$\frac{n}{\sin nx} = \frac{1}{\sin x} + \sum_{k=\pm 1}^{\pm\frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^k \cos\frac{k\pi}{n}}{\left(\sin x - \sin\frac{k\pi}{n}\right)} = \frac{1}{\sin x} + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^k\, 2\cos\frac{k\pi}{n}\sin x}{\sin^2 x - \sin^2\frac{k\pi}{n}}. \quad (4)$$

IV. *Wurzelpotenzsummen.*

Die Gleichung: $\sin\frac{\pi}{2}x = \cos\frac{\pi}{2}s$ hat die Wurzeln:

$$x = 1 \pm s,\quad -3 \pm s,\quad +5 \pm s,\quad \cdots,$$

die Gleichung: $\sin n\frac{\pi}{2}x = \cos\frac{\pi}{2}s$ hat die Wurzeln:

$$x = \frac{1\pm s}{n},\quad \frac{-3\pm s}{n},\quad \frac{+5\pm s}{n},\quad \cdots.$$

Wir setzen $t = \sin\frac{\pi}{2}x$; dann ist nach (9) S. 249:

$$\sin n\frac{\pi}{2}x = nt - \frac{n(n^2-1^2)}{3!}t^3 + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{5!}t^5 - \cdots$$
$$\cdots \pm \frac{n(n^2-1^2)\cdots(n^2-(n-2)^2)}{n!}t^n,$$

demnach hat die Gleichung:

$$nt - \frac{n(n^2-1^2)}{3!}t^3 + \cdots \pm \frac{n(n^2-1^2)\cdots(n^2-(n-2)^2)}{n!}t^n = \cos\frac{\pi}{2}s$$

oder die Gleichung:

$$1 - \sec\frac{\pi}{2}s\cdot nt + \sec\frac{\pi}{2}s\cdot\frac{n(n^2-1^2)}{3!}t^3 - \cdots = 0$$

die Wurzeln:

$$t = \sin\frac{\pi}{2n}(k\pm s),$$

wo k die Werte:

$$k = +1,\ -3,\ +5,\ \cdots,\ \mp(2n-3),\ \pm(2n-1)$$

durchläuft. Infolgedessen ist:

$$\sum_{k=+1,\,-3,\,+5,\,\cdots,\,+2n-1} \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}(k\pm s)} = n \sec\frac{\pi}{2}s \tag{1}$$

und allgemein nach der Waringschen Formel (vgl. S. 238):

$$\sum_{k=1,\,-3,\,+5,\,\cdots,\,\pm(2n-1)} \frac{1}{\sin^m\frac{\pi(k\pm s)}{2n}} = \\ m\sum_{p+3q+5r+\cdots=m} \frac{(p+q+r+\cdots-1)!}{p!\,q!\,r!\cdots}\left(n\sec\frac{\pi}{2}s\right)^p\left(-\left\{{n \atop 3}\right\}\sec\frac{\pi}{2}s\right)^q\left(\left\{{n \atop 5}\right\}\sec\frac{\pi}{2}s\right)^r\cdots \tag{2}$$

Analog hat die Gleichung: $\operatorname{ctg}\pi x = \operatorname{ctg}\pi s$ die Wurzeln:

$$x = s,\quad s\pm 1,\quad s\pm 2,\quad \cdots$$

und die Gleichung: $\operatorname{ctg} n\pi x = \operatorname{ctg}\pi s$ die Wurzeln:

$$x = \frac{s}{n},\quad \frac{s\pm 1}{n},\quad \frac{s\pm 2}{n},\quad \cdots.$$

Setzen wir:

$$t = \operatorname{tg}\pi x,$$

dann gilt nach S. 241:

$$1-\binom{n}{2}t^2+\binom{n}{4}t^4-\cdots = \left[\binom{n}{1}t-\binom{n}{3}t^3+\cdots\right]\operatorname{ctg} n\pi x.$$

Infolgedessen hat die Gleichung:

$$1-\operatorname{ctg}\pi s\cdot\binom{n}{1}t-\binom{n}{2}t^2+\operatorname{ctg}\pi s\cdot\binom{n}{3}t^3+\cdots = 0$$

die Wurzeln:

$$t = \operatorname{tg}\frac{\pi(s\pm k)}{n},\quad \left(k = 0,\,1,\,\cdots,\,\frac{n-1}{2}\right).$$

Daraus folgt:

$$\sum \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi(s\pm k)}{n}} = \binom{n}{1}\operatorname{ctg}\pi s \tag{3}$$

und allgemein nach der Waringschen Formel:

$$\sum \frac{1}{\operatorname{tg}^m\frac{\pi(s\pm k)}{n}} \\ = m\sum_{p+2q+3r+\cdots=m} \frac{(p+q+r+\cdots-1)!}{p!\,q!\,r!\cdots}\left[\binom{n}{1}\operatorname{ctg}\pi s\right]^p\binom{n}{2}^q\left[-\binom{n}{3}\operatorname{ctg}\pi s\right]^r\cdots. \tag{4}$$

Teilungsformeln.

Jede solche Gleichung, wie z. B.:

$$2\cos x = \left(2\cos\frac{x}{n}\right)^n - \left[{n \atop 1}\right]\left(2\cos\frac{x}{n}\right)^{n-2} + \left[{n \atop 2}\right]\left(2\cos\frac{x}{n}\right)^{n-4} - \cdots$$

kann auch als Teilungsgleichung aufgefaßt werden, indem aus diesen Gleichungen $\cos\frac{x}{n}$ als Funktion von $\cos x$ zu bestimmen ist.

Umgekehrt ist die Formel:

$$\cos\frac{x}{n} = \cos^{\frac{1}{n}} x \left[1 - \binom{\frac{1}{n}}{2} \operatorname{tg}^2 x + \binom{\frac{1}{n}}{4} \operatorname{tg}^4 x - \cdots\right]$$

für $\cos x > \sin x$ die Auflösung dieser Gleichung, da ja die Gültigkeit dieser Multiplikationsformel auch für gebrochene Multiplikatoren bewiesen worden war (S. 245).

Kapitel IV.

Grenzfälle.

Wir wollen aus den bisher gewonnenen Formeln, indem wir n gegen 0 abnehmen oder gegen ∞ wachsen lassen, neue Formeln herleiten.

Der Grenzübergang darf vollzogen werden, indem man die Summen bzw. Produkte der Grenzwerte der einzelnen Summanden bzw. Faktoren bildet.[1] Über die Konvergenz der entstehenden Entwicklungen wird weiter unten das Erforderliche zusammengestellt.

Aus:

$$\frac{\cos x}{\cos^n \frac{x}{n}} = 1 - \binom{n}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{n} + \binom{n}{4} \operatorname{tg}^4 \frac{x}{n} - \cdots$$

folgt für $n = \infty$ wegen $\lim\limits_{n=\infty} n \operatorname{tg}\frac{x}{n} = x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots.^{2)} \tag{1}$$

Dieselbe Reihe ergibt sich für $n = \infty$ und wegen $\lim\limits_{n=\infty} n \sin\frac{x}{n} = x$ aus den Formeln (8) und (9) auf S. 248, 249.

Ebenso folgt aus:

$$\frac{\sin x}{\cos^n \frac{x}{n}} = n \operatorname{tg}\frac{x}{n} - \binom{n}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{x}{n} + \binom{n}{5} \operatorname{tg}^5 \frac{x}{n} - \cdots$$

für $n = \infty$:

---

1) S. z. B. O. Stolz und J. A. Gmeiner, Einleitung in die Funktionentheorie, Leipzig 1902, 1904.

2) Gregory, Commerc. epist. Nr. XVIII.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots.^{1)} \tag{2}$$

Desgleichen ergibt sich aus:

$$\frac{\sin nx}{n \cos^n x} = \operatorname{tg} x - \frac{(n-1)(n-2)}{3!} \operatorname{tg}^3 x + \cdots$$

für $n = 0$:

$$x = \operatorname{tg} x - \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} - \cdots \tag{3}$$

oder:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots,$$

für $|x| < 1$, da die Reihe unter dieser Bedingung konvergiert.[1]

Um festzustellen, welcher der Werte von arc tg x durch diese Reihe dargestellt wird, beachten wir, daß die Reihe:

$$1 - \frac{x^2}{3}\left(1 - \frac{3x^2}{5}\right) - \frac{x^6}{7}\left(1 - \frac{7x^2}{9}\right) - \cdots$$

kleiner ist als ihr erstes Glied 1, da alle folgenden subtrahiert werden, ebenso ergibt sich aus der Anordnung:

$$\left(1 - \frac{x^2}{3}\right) + \frac{x^4}{5}\left(1 - \frac{5x^2}{7}\right) + \cdots,$$

daß sie größer ist als ihr erstes Glied $\left(1 - \frac{x^2}{3}\right)$, da alle folgenden Glieder addiert werden. Infolgedessen liegt der Wert der Reihe $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$ zwischen den Grenzen $+1$ und -1, repräsentiert also den zwischen $+\frac{\pi}{4}$ und $-\frac{\pi}{4}$ gelegenen Wert von arc tg x, den *Hauptwert.*

Ferner folgt aus (8) S. 248:

$$\frac{\sin nx}{n \sin x \cos x} = 1 - \frac{n^2 - 2^2}{3!} \sin^2 x + \cdots$$

für $n = 0$:

$$\frac{x}{\cos x} = \sin x + \frac{2^2}{3!} \sin^3 x + \frac{2^2 \cdot 4^2}{5!} \sin^5 x + \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}{7!} \sin^7 x + \cdots$$

$$= \sin x + \frac{2}{1} \frac{\sin^3 x}{3} + \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3} \cdot \frac{\sin^5 x}{5} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 5} \cdot \frac{\sin^7 x}{7} + \cdots$$

oder:

$$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} = x + \frac{2}{1} \frac{x^3}{3} + \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3} \frac{x^5}{5} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 5} \frac{x^7}{7} + \cdots \tag{4}$$

---

1) J. Gregory, Commerc. epist. Nr. XIX, XX. Den besonderen Fall

$$x = 1, \quad \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$$

hatte Leibniz gefunden, wie er am 26. Oktober 1674 an Oldemburg schreibt; Acta Erudit. Lips. 1682. Schriften hrsg. v. C. J. Gerhardt, 1. Abt. B. I, 1849—55, Bd. II, 16.

Aus der Formel (9) S. 249:

$$\frac{\sin nx}{n \sin x} = 1 - \frac{n^2 - 1^2}{3!} \sin^2 x + \frac{(n^2 - 1^2)(n^2 - 3^2)}{5!} \sin^4 x - \cdots$$

ergibt sich für $n = 0$ [1]):

$$x = \sin x + \frac{1}{2} \frac{\sin^3 x}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\sin^5 x}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{\sin^7 x}{7} + \cdots$$

oder:

$$\text{arc} \sin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \cdots {}^{2)} \tag{5}$$

Setzt man in der Formel (4):

$$\sin \frac{x}{2} \text{ für } x \quad \text{und} \quad \sin^2 \frac{x}{2} = \varepsilon,$$

so erhält man:

$$\frac{x}{\sin x} = 1 + \frac{2}{3} \varepsilon + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \varepsilon^2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \varepsilon^3 + \cdots \tag{6}$$

und, indem man den reziproken Wert nimmt:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{2}{3} \varepsilon - \frac{1}{5} \left(\frac{2}{3} \varepsilon\right)^2 - \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{2}{3} \varepsilon\right)^3 - \frac{23}{175} \left(\frac{2}{3} \varepsilon\right)^4 - \cdots \tag{7}$$

Indem man auch links den halben Winkel einführt und $\text{tg} \frac{x}{2} = t$ setzt, wird aus Formel (6):

$$\text{arc tg}\, t = \frac{t}{1 + t^2} \left\{ 1 + \frac{2}{3} \frac{t^2}{1 + t^2} + \frac{2}{3} \frac{4}{5} \left(\frac{t^2}{1 + t^2}\right)^2 + \cdots \right\} {}^{3)}. \tag{8}$$

Analoge Grenzübergänge sind für die *Produkt*darstellungen (S. 251, 252) auszuführen:

Aus

$$\frac{\sin nx}{n \sin x} = \prod \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{k\pi}{n}}\right)$$

folgt, wenn man die Substitution $x \parallel \frac{x}{n}$ einführt und dann zur Grenze $n = \infty$ übergeht:

---

1) Die Formel (9) ist zwar nur für ungerade n hergeleitet, so daß $n = 0$ zunächst kein zulässiger Wert ist. Aber alle diese Formeln gelten, wie z. B. für (1) und (2) S. 243 bewiesen wurde, überhaupt für beliebige (reelle) n.

2) Die Reihe konvergiert für $|x| \leqq 1$ (s. u.) und stellt den zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ gelegenen *Hauptwert* von $\text{arc} \sin x$ dar. Vgl. Cauchy l. c., p. 549.

3) Ch. Hutton, Phil. Trans. (1776), p. 476; Euler, Nova acta XI (1793) 133ff., Opera posthuma ed. P. H. Fuß und N. Fuß I, p. 288; Euler hat mit dieser Reihe π auf 20 Stellen in kurzer Zeit berechnet. Dieselbe Reihe fand auf anderem Wege wie Euler J. Thomson, Edinb. Phil. Trans. V (1840), p. 217; ferner fand sie von neuem De Morgan, Cambr. Trans. XI (1866), p. 232. Vgl. J. W. L. Glaisher, Messenger II (1873), p. 119.

$$\sin x = x \prod_{k=1,2,\ldots}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{(k\pi)^2}\right)^{1)} \qquad (9)$$

Analog erhält man aus der vierten oder sechsten Formel auf S. 252:

$$\cos x = \prod_{k=1,3,\ldots}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2}\right). \qquad (10)$$

Insbesondere aus (9) für $x = \frac{\pi}{2}$ die Formel:

$$\frac{2}{\pi} = \prod \frac{4k^2 - 1}{4k^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots {}^{2)}$$

Entsprechende Formeln bekommt man, wenn man in den Darstellungen durch *Partialbrüche* zur Grenze $n = \infty$, bzw. $n = 0$ übergeht.

Ersetzt man in der Formel (1) S. 252 x durch $\frac{x}{n}$:

$$\frac{\cos^n \frac{x}{n}}{\sin x} = \frac{1}{n \operatorname{tg} \frac{x}{n}} + 2 \sum \frac{(-1)^k \cos^{n-2}\left(\frac{k\pi}{n}\right) n \operatorname{tg} \frac{x}{n}}{n^2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{n} - n^2 \operatorname{tg}^2 \frac{k\pi}{n}},$$

so erhält man für $n = \infty$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + 2 \sum_{k=1,2,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^k x}{x^2 - (k\pi)^2} \\ \text{oder:}\quad & \\ &\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{k=\pm 1, \pm 2, \ldots}^{\pm\infty} (-1)^k \frac{1}{x - k\pi} \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Analog ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\cos x} = \sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}} k\pi}{x^2 - \left(\frac{k\pi}{2}\right)^2}, \\ \text{oder:}\quad & \\ &\frac{1}{\cos x} = \sum_{k=\pm 1, \pm 3, \ldots}^{\pm\infty} (-1)^{\frac{k+1}{2}} \frac{1}{x - \frac{k\pi}{2}} \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

---

1) Euler, Comm. Acad. Petr. VII (1734/35), p. 123, Introductio, p. 131.

2) J. Wallis, Arithmetica infinitorum 1659. Opera I. 467, II. 356; s. auch Vandermonde, Hist. de l'ac. de Paris 1772, I (Paris 1775), p. 489. Vgl. hierzu und über den Brounkerschen Kettenbruch Plana, Crelles J. 17 (1837), p. 17.

Setzen wir schließlich in den *Wurzelpotenzsummen* S. 254:

$$\sum_{k=+1,-3,+5,\dots}^{2n-1} \frac{1}{\sin^m \frac{\pi(k \pm s)}{2n}}$$

$$= m \sum_{p+3q+5r+\cdots=m} \frac{(p+q+r+\cdots-1)!}{p!\,q!\,r!\cdots} \left(n \sec\frac{\pi}{2}s\right)^p \left(-\begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix} \sec\frac{\pi}{2}s\right)^q \left(\begin{bmatrix} n \\ 5 \end{bmatrix} \sec\frac{\pi}{2}s\right)^r \cdots$$

und

$$\sum_{k=0,1,2,3,\dots} \frac{1}{\operatorname{tg}^m \frac{\pi(s \pm k)}{n}}$$

$$= m \sum_{p+3q+5r+\cdots=m} \frac{(p+q+r+\cdots-1)!}{p!\,q!\,r!\cdots} \left(\binom{n}{1} \operatorname{ctg}\pi s\right)^p \binom{n}{2}^q \left(-\binom{n}{3} \operatorname{ctg}\pi s\right)^r \cdots$$

$n = \infty$, so geht, da ja $n^{p+3q+5r+\cdots}$ stets gleich n^m ist, die erste Gleichung über in:

$$\sum_{k=1,-3,+5,\dots} \frac{1}{(k \pm s)^m}$$

$$= m \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \sum_{p+3q+5r+\cdots=m} \frac{(p+q+r+\cdots-1)!}{p!\,q!\,r!\dots} \left(\sec\frac{\pi}{2}s\right)^p \left(-\frac{1}{3!}\sec\frac{\pi}{2}s\right)^q \left(\frac{1}{5!}\sec\frac{\pi}{2}s\right)^r \cdots \tag{13}$$

Z. B. ergibt sich hieraus für $m = 1$:

$$\sum_{k=1,-3,+5,\dots} \frac{1}{k \pm s} = \frac{\pi}{2} \sec \frac{\pi}{2} s \text{ [1]}, \tag{14}$$

und hieraus wiederum für $s = 0$:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}. \tag{15}$$

Andererseits kann man in (13) $s = 0$ und m beliebig setzen und bekommt dann:

$$\sum_{k=1,-3,+5,\dots} \frac{1}{k^m} = \frac{m}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^m \sum \frac{(p+q+r+\cdots-1)!}{p!\,q!\,r!\cdots} \left(-\frac{1}{3!}\right)^q \left(\frac{1}{5!}\right)^r \cdots; \tag{16}$$

woraus sich bei *geradem* m auch der Wert der Summe $\sum \frac{1}{k^m}$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$ durch Multiplikation von (16) mit $\frac{2^m}{2^m - 1}$ ergibt. Die zweite der beiden obigen Wurzelpotenzsummenformeln gibt für $n = \infty$:

$$\sum_{k=0,1,2,3,\dots} \frac{1}{(s \pm k)^m}$$

$$= m\pi^m \sum \frac{(p+q+r+\cdots-1)!}{p!\,q!\,r!\cdots} (\operatorname{ctg}\pi s)^p \cdot \left(\frac{1}{2!}\right)^q \left(-\frac{1}{3!}\operatorname{ctg}\pi s\right)^r \cdots \tag{17}$$

---

1) Euler l. c., p. 126, 134.

Z. B. für $m = 1$:

$$\sum_{k=0,1,2,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{s \pm k} = \pi \operatorname{ctg} \pi s\text{ [1]},$$

oder:

$$\pi \operatorname{ctg} \pi s - \frac{1}{s} = \sum_{k=1,2,3,\ldots} \frac{1}{s \pm k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2s}{s^2 - k^2}. \tag{18}$$

Daraus folgt für $s = \frac{1}{4}$ wieder die Formel (15).

Die Substitutionen $s \parallel s - 1$ in (14), $s \parallel s - \frac{1}{2}$ in (18) geben die Partialbruchreihen für cosec und tg; außerdem kann man aus (18) vermittels $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} x = \operatorname{cosec} x$ die Reihe für cosec, also auch für sec, und vermittels $\operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{ctg} 2x = \operatorname{tg} x$ die Reihe für tg herleiten.[2])

Hypergeometrische Reihe.[3])

Die bisher erhaltenen Potenzreihen lassen sich als Spezialfälle der hypergeometrischen Reihe darstellen:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \cdots.$$

Es ist nämlich[4]):

$$(1+x)^n = F(-n, \gamma, \gamma, -x),$$

$$\frac{1}{2}((1+x)^n + (1-x)^n) = F\left(-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right),$$

$$\frac{1}{2}((1+x)^n + 1) = F(-n, \omega, 2\omega, -x), \ (\lim \omega = 0),$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{(1+x)^n - (1-x)^n}{n}\right) = xF\left(-\frac{n}{2} + \frac{1}{2}, -\frac{n}{2} + 1, \frac{3}{2}, x^2\right),$$

$$\frac{(1+x)^n - 1}{n} = xF(1-n, 1, 2, -x),$$

$$\sin nx = n \sin x F\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \sin^2 x\right),$$

$$\sin nx = n \sin x \cos x F\left(\frac{n}{2} + 1, -\frac{n}{2} + 1, \frac{3}{2}, \sin^2 x\right),$$

$$\frac{\sin nx}{\cos^n x} = n \operatorname{tg} x F\left(-\frac{n}{2} + 1, -\frac{n}{2} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\operatorname{tg}^2 x\right),$$

$$\sin nx \cos^n x = n \operatorname{tg} x F\left(\frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\operatorname{tg}^2 x\right),$$

---

1) Euler l. c., p. 126, 134.

2) Durch Entwicklung der Partialbrüche nach Potenzen von x erhält man die *Potenz*reihen für tg, ctg, sec, cosec, in deren Koeffizienten die Bernoullischen und Eulerschen Zahlen vorkommen. Über diese vgl. insbesondere Saalschütz, Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen, Berlin 1893.

3) Der Name in etwas anderer Bedeutung bei Wallis (Arithmetica infinitorum = Opera, Oxoniae 1645, p. 466), die Reihe zuerst bei Euler (Nov. act. Petrop. 12, 1794, p. 5I). S. ferner L. Jecklin, Hist.-krit. Untersuchung üb. d. Theorie der hypergeometrischen Reihe, Diss., Bern 1901. 4) Gauss III, p. 127.

$$\cos nx = F\left(\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, \sin^2 x\right),$$

$$\cos nx = \cos x\, F\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}, -\frac{n}{2}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sin^2 x\right),$$

$$\frac{\cos nx}{\cos^n x} = F\left(-\frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\operatorname{tg}^2 x\right),$$

$$\cos nx \cos^n x = F\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}, \frac{n}{2}, \frac{1}{2}, -\operatorname{tg}^2 x\right),$$

$$\ln(1+x) = xF(1, 1, 2, -x),$$

$$\operatorname{arctg\,hyp} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = x\,F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, x^2\right),$$

$$e^x = F\left(1, \infty, 1, \frac{x}{\infty}\right) = 1 + x\,F\left(1, \infty, 2, \frac{x}{\infty}\right)$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 F\left(1, \infty, 3, \frac{x}{\infty}\right) = \cdots\text{[1]},$$

$$\cos\operatorname{hyp} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = F\left(\infty, \infty, \frac{1}{2}, \frac{x^2}{4\infty^2}\right),$$

$$\sin\operatorname{hyp} x = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = x\,F\left(\infty, \infty, \frac{3}{2}, \frac{x^2}{4\infty^2}\right),$$

$$\cos x = F\left(\infty, \infty, \frac{1}{2}, -\frac{x^2}{4\infty^2}\right),$$

$$\sin x = x\,F\left(\infty, \infty, \frac{3}{2}, -\frac{x^2}{4\infty^2}\right),$$

$$\arcsin x = x\,F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right) \text{ oder}$$

$$x = \sin x\,F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \sin^2 x\right),$$

$$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = x\,F\left(1, 1, \frac{3}{2}, x^2\right) \text{ oder}$$

$$x = \sin x \cos x\,F\left(1, 1, \frac{3}{2}, \sin^2 x\right),$$

$$\operatorname{arctg} x = x\,F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, -x^2\right),$$

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}F\left(1, 1, \frac{3}{2}, \frac{x^2}{1+x^2}\right),$$

Kettenbrüche.

Setzt man:

$$\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+m-1)(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+m-1)}{m!\,(\gamma+1)(\gamma+2)\cdots(\gamma+m-1)} = M,$$

so hat x^m

1) ∞ steht der Kürze halber für eine Zahl, die man gegen ∞ divergieren lassen muß.

in $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ den Koeffizienten: $\frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma} \cdot M$,

„ $F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)$ „ „ $\frac{\alpha \cdot (\beta+m)}{\gamma+m} \cdot M$,

„ $F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, x)$ „ „ $\frac{(\alpha+m)(\beta+m)(\gamma+1)}{(\gamma+m)(\gamma+m-1)} \cdot M$,

und folglich:

in $F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)-F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ „ $\frac{\alpha \cdot (\gamma-\beta)}{\gamma} \cdot \frac{m}{\gamma+m} \cdot M$.

Nun ist aber $\frac{mM}{\gamma+m}$, abgesehen vom Faktor $(\gamma+1)$, der Koeffizient von x^{m-1} in $F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, x)$; also ergibt sich:

$$F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x) - F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)} x \cdot F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, x). \quad (1)$$

Bezeichnen wir:

$$\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)} \text{ mit } G(\alpha, \beta, \gamma, x),$$

so wird:

$$\frac{F(\alpha+1, \beta, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)} = \frac{F(\beta, \alpha+1, \gamma+1, x)}{F(\beta, \alpha, \gamma, x)} = G(\beta, \alpha, \gamma, x),$$

folglich, wenn wir die Gleichung (1) durch $F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)$ dividieren:

$$1 - \frac{1}{G(\alpha, \beta, \gamma, x)} = \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)} x \cdot G(\beta+1, \alpha, \gamma+1, x),$$

oder:

$$G(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{1}{1 - \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)} x \cdot G(\beta+1, \alpha, \gamma+1, x)}. \quad (2)$$

Ebenso:

$$G(\beta+1, \alpha, \gamma+1, x) = \frac{1}{1 - \frac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)} x \cdot G(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, x)}$$

usw.

Hieraus ergibt sich die folgende Darstellung durch einen Kettenbruch:

$$\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{ax}{1 - \cfrac{bx}{1 - \cfrac{cx}{1 - \cfrac{dx}{1 - \cdots}}}}} \quad (3)$$

wo

$$a = \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}, \quad b = \frac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)},$$

$$c = \frac{(\alpha+1)(\gamma+1-\beta)}{(\gamma+2)(\gamma+3)}, \quad d = \frac{(\beta+2)(\gamma+2-\alpha)}{(\gamma+3)(\gamma+4)},$$

. . . .

gesetzt ist.

Wählt man in (3) noch speziell $\beta = 0$, so daß $F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1$ wird, und ersetzt γ durch $(\gamma - 1)$, so erhält man die folgende Kettenbruchentwicklung [1]):

$$F(\alpha, 1, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \cdots$$

$$= \cfrac{1}{1 - \cfrac{ax}{1 - \cfrac{bx}{1 - \cfrac{cx}{1 - \cfrac{dx}{1 - \cdots}}}}} \tag{4}$$

wo

$$a = \frac{\alpha}{\gamma}, \qquad b = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma(\gamma+1)},$$

$$c = \frac{(\alpha+1)\gamma}{(\gamma+1)(\gamma+2)}, \qquad d = \frac{2(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+2)(\gamma+3)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

gesetzt ist.

Aus dieser Formel (4) ergeben sich für einige der oben betrachteten Funktionen folgende Kettenbruchentwicklungen:

$$(1+x)^n = \cfrac{1}{1 - \cfrac{nx}{1 + \cfrac{\frac{n+1}{2}x}{1 - \cfrac{\frac{n-1}{2\cdot 3}x}{1 + \cfrac{\frac{2(n+2)}{3\cdot 4}x}{1 - \cfrac{\frac{2(n-2)}{4\cdot 5}x}{1 + \cdots}}}}}}$$

$$\frac{(1+x)^n - (1-x)^n}{(1+x)^n + (1-x)^n} = \cfrac{nx}{1 + \cfrac{(n^2-1)x^2}{3 + \cfrac{(n^2-4)x^2}{5 + \cfrac{(n^2-9)x^2}{7 + \cdots}}}} \text{ [2])}$$

---

1) Daß der so gebildete Kettenbruch wirklich konvergiert und mit der erzeugenden Funktion übereinstimmt, und zwar falls $\frac{1}{x}$ kein positiver reeller echter Bruch ist, hat zuerst Thomé (Crelles J. 66 (1886), p. 322; 67 (1867), p. 299) bewiesen. Die erzeugende Funktion ist durch die Differentialgleichung

$$F'' + \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)}{x(1-x)} F' - \frac{\alpha\beta}{x(1-x)} F = 0 \qquad (\beta = 1)$$

zu definieren.

2) Dieser Kettenbruch ist aus der Rekursionsformel zu folgern:

$$R_{h-1} = (2h+1) R_h + (n^2 - (h+1)^2) R_{h+1},$$

die für die Funktionen:

$$R_{h-1} = \sum_{k=0,1,\cdots,\infty} \binom{n-h}{2k} \frac{x^{2k}}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)\cdots(2k+2h-1)}$$

gilt.

$$\ln(1+x) = \cfrac{x}{1+\cfrac{\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{x}{6}}{1+\cfrac{\frac{2}{6}x}{1+\cfrac{\frac{2}{10}x}{1+\cfrac{\frac{3}{10}x}{1+\cfrac{\frac{3}{14}x}{1+\ddots}}}}}}}$$

$$\operatorname{arctg\,hyp} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \cfrac{x}{1-\cfrac{\frac{1}{3}x^2}{1-\cfrac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}x^2}{1-\cfrac{\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{7}x^2}{1-\cfrac{\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{9}x^2}{1-\ddots}}}}}$$

$$\operatorname{arctg} x = \cfrac{x}{1+\cfrac{\frac{1}{3}x^2}{1+\cfrac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}x^2}{1+\cfrac{\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{7}x^2}{1+\cfrac{\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{9}x^2}{1+\ddots}}}}}$$

$$e^x = \cfrac{1}{1-\cfrac{x}{1+\cfrac{\frac{1}{3}x}{1-\cfrac{\frac{1}{6}x}{1+\cfrac{\frac{1}{6}x}{1-\cfrac{\frac{1}{10}x}{1+\cfrac{\frac{1}{10}x}{1-\ddots}}}}}}}$$

$$\frac{\arc\sin x}{\sqrt{1-x^2}} = \cfrac{x}{1 - \cfrac{\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3}x^2}{1 - \cfrac{\frac{1\cdot 2}{3\cdot 5}x^2}{1 - \cfrac{\frac{3\cdot 4}{5\cdot 7}x^2}{1 - \cfrac{\frac{3\cdot 4}{7\cdot 9}x^2}{1 - \cfrac{\frac{5\cdot 6}{9\cdot 11}x^2}{1 - \cdots}}}}}}$$

$$\frac{x}{\sin x} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3}\sin^2\frac{x}{2}}{1 - \cfrac{\frac{1\cdot 2}{3\cdot 5}\sin^2\frac{x}{2}}{1 - \cfrac{\frac{3\cdot 4}{5\cdot 7}\sin^2\frac{x}{2}}{1 - \cfrac{\frac{3\cdot 4}{7\cdot 9}\sin^2\frac{x}{2}}{1 - \cfrac{\frac{5\cdot 6}{9\cdot 11}\sin^2\frac{x}{2}}{1 - \cdots}}}}}}$$

Hieraus ergibt sich in erster Annäherung der Wert:

$$\frac{\sin x}{x} \div 1 - \frac{2}{3}\sin^2\frac{x}{2} = \frac{2+\cos x}{3},$$

d. i. die Formel des *Nikolaus von Cusa* (S. 188), und in zweiter Annäherung:

$$\frac{\sin x}{x} \div \frac{15 - 12\sin^2\frac{x}{2}}{15 - 2\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{9+6\cos x}{14+\cos x}$$

d. i. die Formel von *Newton* (S. 203).

Setzen wir in die Entwicklung von $\frac{(1+x)^n-(1-x)^n}{(1+x)^n+(1-x)^n}$ erst $x=\frac{z}{n}$, dann $x=\frac{iz}{n}$, so erhalten wir für $n=\infty$ [1]):

1) Diese und ähnliche Kettenbrüche haben zuerst Euler (Comm. Acad. Petrop. IX (1737), p. 98; Introductio 1753; Opusc. analyt. II, p. 217) und Lagrange (Mém. Acad. de Berlin 1776 236) abgeleitet; Euler beweist auch, wenn auch nicht mit der heutigen Strenge, daß ein solcher Kettenbruch überhaupt einen bestimmten Grenzwert besitzt. Daß aber diese Kettenbrüche wirklich gegen $\frac{\operatorname{tg\,hyp} z}{z}$ $\left(\text{bzw. } \frac{\operatorname{tg} z}{z}\right)$ konvergieren, beweist erst Lambert (Hist. de l'acad. de Berlin, der 1768 gedruckte, mit „année 1761" bezeichnete Band, p. 265—322), der diese Kettenbrüche unabhängig gefunden hatte. Ist

$$\frac{\operatorname{tg\,hyp} z}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{z^2}{3 + \cfrac{z^2}{5 + \cfrac{z^2}{7 + \ddots}}}}$$

$$\frac{\operatorname{tg} z}{z} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{z^2}{3 - \cfrac{z^2}{5 - \cfrac{z^2}{7 - \cfrac{z^2}{9 - \ddots}}}}}$$

Konvergenzkriterien.[1])

1. Eine Reihe von Zahlen $s_1, s_2, s_3, \ldots$ besitzt *den Grenzwert* s_∞, wenn durch Wahl von n der Unterschied $|s_\infty - s_n|$ kleiner gemacht werden kann, als eine beliebig kleine Größe.[2])

2. Eine Reihe von Zahlen $s_1, s_2, s_3, \ldots$ besitzt *einen Grenzwert*, wenn durch Wahl von n der Unterschied $|s_{k+n} - s_n|$ bei *jedem* k kleiner gemacht werden kann, als eine beliebig kleine Größe.[3])

3. Eine unendliche Summe $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$ *konvergiert*, wenn die Summenreihe $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$, $\cdots$ einen Grenzwert hat[4]); dieser Grenzwert heißt die *Summe* der Reihe.

4. *Konvergenzkriterien* ergeben sich durch Vergleich mit Reihen, deren Konvergenz bekannt ist.[5]) Konvergieren die Reihen

$$\sum b_n = b_1 + b_2 + \cdots \quad \text{und} \quad \sum c_n = c_1 + c_2 + \cdots$$

und ist stets oder von einem bestimmten n ab:

$$hc_n \leqq a_n \leqq kb_n,$$

$$\frac{B_n}{A_n} = \cfrac{z}{1 - \cfrac{z^2}{3 - \ddots - \cfrac{z^2}{2n+1}}},$$

so beweist Lambert, daß $|A_n \operatorname{tg} z - B_n|$ mit wachsendem n gegen Null konvergiert.

1) Hier kann nur das Wichtigste zusammengestellt werden. Zur genaueren Information sei namentlich verwiesen auf Pringsheim, Enc. d. Math. I, p. 87.

2) J. Wallis, Arithmetica infinitorum, Prop. 43 = Opera (Oxford 1695) I, p. 385.

3) G. Cantor, Math. Ann. 21 (1883), p. 124.

4) D. h. also nach 2., daß $a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}$ durch Wahl von n bei *jedem* k beliebig klein gemacht werden kann (s. Bolzano, Beweis des Lehrsatzes usw. 1817). Gewöhnlich wird das als das „wahre" Konvergenzkriterium angesehen; richtiger ist es wohl, darin nur die scharfe Fassung des Begriffes der Konvergenz zu erblicken.

5) Dies Prinzip wendet erst Gauss (Werke III, p. 142) an.

so ist auch:

$$h \sum c_n \leqq \sum a_n \leqq k \sum b_n,$$

wo die Summation mit dem betreffenden n beginnt, also auch $\sum a_n$ konvergent.

5. Konvergiert die Reihe der absoluten Beträge $\sum |a_n|$, so konvergiert die Reihe $\sum a_n$ *„absolut“* oder *„unbedingt“*.[1]) Für die absolute Konvergenz braucht man nur *eine* Vergleichsreihe $\sum b_n$. Ist

$$|a_n| \leqq k_n |b_n|, \tag{I}$$

mit endlich bleibendem k_n und $\sum |b_n|$ konvergent, dann auch $\sum |a_n|$.

Oder ist

$$\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| \leqq h_n \left|\frac{b_n}{b_{n-1}}\right|, \tag{II}$$

mit endlich bleibendem $\prod h_n$, so ist auch $\sum |a_n|$ konvergent; denn die zweite Voraussetzung (II) ist auf die erste (I) zurückführbar:

$$|a_n| \leqq h_n \left|\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}\right| |b_n| \leqq h_n h_{n-1} \left|\frac{a_{n-2}}{b_{n-2}}\right| |b_n| \text{ usw.}$$

Oder ist

$$\left|\frac{a_n}{a_{n-1}} : \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right| \leqq l_n \left|\frac{b_n}{b_{n-1}} : \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}\right|, \tag{III}$$

mit endlich bleibendem $\prod\prod l_n$[2]), so ist auch $\sum |a_n|$ konvergent; usw. Umgekehrt sind (I) bzw. (II) bzw. (III) usw., wenn $\sum |a_n|$ *divergiert*, Divergenzkriterien für $\sum |b_n|$.

6. Die Kriterien (III) usw. sind bisher nicht ausgesprochen worden; (II) nur unter der engeren Annahme $h_n = 1$. Für diese gilt: Jedes Kriterium *erster Art*[3]) (I) ist besser, als das zugehörige *zweiter Art*[3]) (II). Denn ist $\sum |b_n|$ konvergent, und wählt man $\lambda > 0$ so, daß von irgendeinem n ab, stets

$$|a_n| = |b_n| - \lambda b_n^2 > 0$$

ist, so wird

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = 1 - \lambda |b_n|$$

mit wachsendem n wachsen, also:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right| > \left|\frac{a_n}{b_n}\right|,$$

---

1) Cauchy, Analyse algébrique, p. 142; Résumé analytique, p. 39.

2) Das ist die *zweite* Produktreihe der Größen $l_1, l_2, l_3, \ldots$ oder die *erste* Produktreihe der Produkte $l_1, l_1 l_2, l_1 l_2 l_3$ usw.

3) Diese Bezeichnung rührt von P. Du Bois-Reymond (Crelles J. 76 (1873), p. 61) her.

d. h. (II) nicht erfüllt sein, während (I) wegen

$$|a_n| < |b_n|$$

erfüllt ist.

Umgekehrt, sei $\sum |b_n|$ divergent, aber die $|b_n|$ abnehmend, $|a_n| = |b_n| + \lambda |b_n|^2$, so ist das *Divergenzkriterium* $|a_n| \geqq |b_n|$ I[ter] Art erfüllt, das II[ter] Art nicht, denn es nimmt

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = 1 + \lambda |b_n|$$

mit wachsendem n ab, also ist:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right| \leqq \left|\frac{a_n}{b_n}\right|.$$

Ein Kriterium II[ter] Art ist einfacher anwendbar; nur wenn es versagt, greife man zu dem zugehörigen I[ter] Art.

7. Die erste Vergleichsreihe ist die geometrische $\sum |q|^n$, konvergent für $|q| < 1$, sonst divergent. Daraus ergeben sich die zwei *(geometrischen)* [1]) Kriterien:

I. $|a_n|^{\frac{1}{n}} \leqq q,\ q < 1$ Konvergenz,

$|a_n|^{\frac{1}{n}} \geqq q,\ q \geqq 1$ Divergenz;

II. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqq q,\ q < 1$ Konvergenz,

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geqq q,\ q \geqq 1$ Divergenz.

Diese Kriterien ergeben die Konvergenz der Reihen für e^x, sin hyp x, cos hyp x, sin x, cos x für jedes reelle x; die Konvergenz der Reihen für $l(1 \pm x)$, arc tg x, arc tg hyp x, arc sin x, arc sin hyp x für $|x| < 1$, deren Divergenz für $|x| > 1$; bei $|x| = 1$ versagen sie.

8. Jede Reihe, bei der die Konvergenz bzw. Divergenz bekannt ist, aber nicht aus den Kriterien (7) erschlossen werden kann, liefert neue, schärfere Kriterien. Die einfachste ist die Dirichletsche (harmonische) Reihe [2]):

$$S = \frac{1}{1^\nu} + \frac{1}{2^\nu} + \frac{1}{3^\nu} + \frac{1}{4^\nu} + \cdots.$$

Denn:

$$a_n^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\nu}{n}} = e^{-\frac{\nu}{n} l n} \quad \text{und} \quad \left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu$$

konvergieren gegen 1, man kann also kein $q < 1$ den Kriterien (7) gemäß finden.

1) Cauchy l. c., p. 133, 134. 2) Cauchy l. c.

Die Reihe S ist kleiner als:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2^\nu}+\frac{1}{2^\nu}+\frac{1}{4^\nu}+\frac{1}{4^\nu}+\frac{1}{4^\nu}+\frac{1}{4^\nu}+\frac{1}{8^\nu}+\frac{1}{8^\nu}+\frac{1}{8^\nu}+\frac{1}{8^\nu}+\frac{1}{8^\nu}+\frac{1}{8^\nu}+\frac{1}{8^\nu}+\frac{1}{8^\nu}+\frac{1}{16^\nu}+\cdots,$$

d. h. als

$$1+\frac{1}{2^{\nu-1}}+\frac{1}{4^{\nu-1}}+\frac{1}{8^{\nu-1}}+\cdots,$$

also konvergent für $\nu>1$.

Sie ist größer als:

$$1+\frac{1}{2^\nu}+\frac{1}{4^\nu}+\frac{1}{4^\nu}+\frac{1}{8^\nu}+\frac{1}{8^\nu}+\frac{1}{8^\nu}+\frac{1}{8^\nu}+\frac{1}{16^\nu}+\cdots,$$

d. h. als:

$$\frac{1}{2}\left(2+\frac{2}{2^\nu}+\frac{4}{4^\nu}+\frac{8}{8^\nu}+\cdots\right),$$

also divergent für $\nu\leqq 1$.

Daraus ergeben sich die zwei *(harmonischen)* Kriterien:

I.[1]) $n^\nu|a_n|<k$, für $\nu>1$ Konvergenz,

$n|a_n|>k$ Divergenz;

II.[2]) $n\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|-1\right)\geqq k>1$ Konvergenz,

$n\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|-1\right)\leqq k<1$ Divergenz.

9. Diese Reihen ergeben die Divergenz der Reihen $l(1-x)$, arc tg hyp x, die Konvergenz von arc sin x, arc sin hyp x bei $x=1$. Bei Anwendung des Kriteriums (8) I. auf die Reihe:

$$\text{arc sin } 1=\sum\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{2n+1}$$
$$=\sum\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2n}\right)\cdot\left(\frac{1}{2n+1}\right)$$

muß man davon Gebrauch machen, daß die Summe:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-ln$$

mit wachsendem n stets zwischen endlichen Grenzen bleibt. In der Tat ist für $z=2, 3, 4, \ldots, n$ stets:

$$l\left(1+\frac{1}{z}\right)<\frac{1}{z}<l\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right),$$

1) Cauchy l. c.

2) Raabe, Schlöm. Ztschr. 10 (1832), p. 63; Duhamel, Liouv. J. 4 (1839), p. 214, 6 (1841), p. 85.

wie aus $l\left(1+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{z}-\frac{1}{2z^2}+\cdots$ folgt. Addiert man alle diese Ungleichungen, so kommt:

$$1-l2+l(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+ln,$$

also:

$$1-l2+l\left(1+\frac{1}{n}\right)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-ln<1.$$

Demnach liegt

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-ln\right)$$

zwischen 1 und $1-l2=0{,}307\ldots$; der genaue Wert

$$C=0{,}5772156649\ldots$$

heißt die *Mascheronische Konstante.*

10. Zwei Reihen $a_1+a_2+a_3+\cdots$, $b_1+b_2+b_3+\cdots$ mit positiven, abnehmenden Gliedern konvergieren oder divergieren zugleich, wenn:

$$b_n=g^n\cdot a_{[g^n]}\quad (\text{wo } g>1, [\,] \text{ das größte Ganze})$$

ist.

Denn es ist erstens:

$$\begin{aligned} a_{[g^{n-1}]+1}+a_{[g^{n-1}]+2}+\cdots+a_{[g^n]} &> ([g^n]-[g^{n-1}])\,a_{[g^n]} \\ &> (g^n-g^{n-1}-1)\,a_{[g^n]} \\ &> \left(1-\frac{1}{g}-\frac{1}{g^m}\right)g^n\,a_{[g^n]}, \end{aligned}$$

für $m\leqq n$ und so, daß $1-\frac{1}{g}-\frac{1}{g^m}>0$ ist.

Durch Summierung von $n=m$ bis ∞ ergibt sich:

I. $$a_{[g^{n-1}]+1}+\cdots>\left(1-\frac{1}{g}-\frac{1}{g^m}\right)(b_m+b_{m+1}+\cdots).$$

Zweitens ist:

$$([g^{n+1}]-[g^n])\,a_{[g^n]}>a_{[g^n]}+a_{[g^n]+1}+\cdots+a_{[g^{n+1}]-1},$$

also:

$$g^{n+1}a_{[g^n]}>a_{[g^n]}+a_{[g^n]+1}+\cdots+a_{[g^{n+1}]-1},$$

durch Summierung von $n=0$ bis ∞ ergibt sich:

II. $$g\sum b_n>\sum a_n.$$

Aus den Ungleichungen I. und II. folgen die Behauptungen.[1])

1) Cauchy l. c.

11. Ist $\sum a_n$ die Reihe $\sum \frac{1}{n^\nu}$, so wird $\sum b_n$ die Reihe $\sum q^n$. Ist $\sum a_n$ die Reihe $\sum \frac{1}{n(ln)^\nu}$, so wird $\sum b_n$ die Reihe $\sum \frac{1}{n^\nu}$.[1]) Ist $\sum a_n$ die Reihe $\sum \frac{1}{n \cdot ln \cdot (lln)^\nu}$, so wird $\sum b_n$ die Reihe $\sum \frac{1}{n(ln)^\nu}$; usw. so gewinnt man eine Reihe immer schäferer (*hyperharmonischer*) Kriterien.[2])

12. Eine Reihe $s_1 + (s_2 - s_1) + (s_3 - s_2) + (s_4 - s_3) + \cdots$ ist beliebig langsam divergierend, und eine Reihe $(r_0 - r_1) + (r_1 - r_2) + (r_2 - r_3) + \cdots$ beliebig langsam konvergierend, wenn $s_1, s_2, s_3, \ldots$ beliebig langsam gegen ∞ wachsen, und $r_0, r_1, r_2, \ldots$ beliebig langsam gegen Null abnehmen; die divergente bzw. konvergente Reihe wird also aus ihrer beliebig angenommenen Summen-, bzw. Restreihe konstruiert.[3]) Infolgedessen gibt es zu jedem Kriterium Reihen, die sich ihm entziehen, d. h. zu jeder divergenten Reihe $\sum |a_n|$ gibt es eine schwächer divergente Reihe $\sum |b_n|$, z. B. die mit der Summenreihe $\sqrt{s_n}$; zu jeder konvergenten Reihe eine schwächer konvergente Reihe $\sum |b_n|$, z. B. die mit der Restreihe $\sqrt{r_n}$.

13. Reihen mit *wechselndem* Vorzeichen

$$S = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

konvergieren, wenn und nur wenn ihre Glieder gegen Null abnehmen.[4]) Denn es wird:

$$a_n - a_{n+1} < (a_n - a_{n+1}) + (a_{n+2} - a_{n+3}) + \cdots = a_n - a_{n+1} + a_{n+2} - a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots$$
$$\cdots = a_n - (a_{n+1} - a_{n+2}) - (a_{n+3} - a_{n+4}) \cdots < a_n.$$

Daraus ergibt sich die Konvergenz der Reihen:

$$l2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots, \ \text{arctg}\, 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4},$$

welche nicht absolut konvergieren. Solche Reihen konvergieren „relativ“ oder „bedingt“, d. h. von der Reihenfolge der Glieder und der Addition abhängig[5]); es gelten nicht das kommutative und das assoziative Gesetz der Addition.

---

1) Cauchy l. c.

2) Bertrand, Liouv. J. 7 (1842), p. 37; s. auch Paucker, Crelles J. 42 (1851), p. 139; Cauchy, Compt. rend. (Paris 1856) 2, p. 638.

3) Dieses Prinzip zur Bildung summierbarer Reihen wendete schon *Leibniz* an: Historia et Origo Calculi differentialis, Werke hrsg. von Gerhardt, Bd. 5, p. 392.

4) Leibniz, Brief an Joh. Bernouilli, 1. Jan. 1714; Commerc. epist. 2, p. 329.

5) Die Abhängigkeit der Konvergenz von der Folge der Glieder bei solchen Reihen bemerkte zuerst Cauchy (Résum. anal., p. 57), daß bei verschiedenen Anordnungen die Reihe gegen verschiedene Werke *konvergieren* kann, Léjeune

Z. B. wird:

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}\right)+\cdots>1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}>\frac{5}{6},$$

während

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=l2=0{,}69\cdots<\frac{5}{6}$$

ist.

14. Wird die Konvergenz einer vorgelegten Reihe durch Vergleich mit anderen ermittelt, so werden dadurch zugleich Grenzen für die Summe der Reihe erhalten, also die Summe der Reihe *approximiert*. Aber diese Approximierung ist eine sehr rohe, da es zur Feststellung der Konvergenz nur auf Grenzen überhaupt, nicht auf möglichst enge Grenzen ankommt. *Kummer*[1]) hat gezeigt, wie man für die Summen langsam konvergierender Reihen *beliebig enge* Grenzen finden kann; dieses Verfahren liefert natürlich auch die *Konvergenz*, aber mehr als das, da es eine approximative *Summation* liefert.

Eine Reihe (von lauter positiven Gliedern) $a_1+a_2+a_3+\cdots$ konvergiert *langsam*, wenn die Quotienten $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ mit wachsendem n der Eins beliebig nahe kommen. Sei also die Entwicklung herzustellen[2]):

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{v_1}{n}+\frac{v_2}{n^2}+\frac{v_3}{n^3}+\cdots,$$

was in vielen Fällen z. B. bei der hypergeometrischen Reihe möglich ist. Man entwickle die Funktion

$$\varphi(n)=cn+c_0+\frac{c_1}{n}+\frac{c_2}{n^2}+\cdots$$

aus der Bedingung, daß die Entwicklung:

$$\varphi(n)\frac{a_n}{a_{n+1}}-\varphi(n+1)-1=f(n+1)-1$$

mit einer möglichst hohen Potenz von $\frac{1}{n}$ beginnt. Das gibt z. B. der Reihe nach:

Dirichlet (Berl Akad. Abh. 1837, p. 48 = Werke I, p. 318), daß das bei *jeder* nicht-absolut konvergenten Reihe statthat, Riemann (Gött. Abh. 13 (1867), p. 97 = Werke, p. 221), daß eine absolut konvergente Reihe bei jeder Anordnung gegen denselben Wert, also unbedingt konvergiert Scheibner (Gratulationsschrift, Leipzig 1860, p. 11).

1) Crelles J. 16 (1837), p. 206.

2) Dann findet nach 8. II Konvergenz statt, wenn $v_1>1$ ist; wie für den unwesentlich spezielleren Fall einer *rationalen* Funktion $1+\frac{v_1}{n}+\cdots$ schon Gauss (Werke III, p. 139) gefunden hatte. Dieselbe Reihe mit *wechselnden* Vorzeichen konvergiert noch bedingt im Intervall $0<v_1\leqq 1$ (Weierstrass, Crelles J. 51 (1856), p. 29 = Werke I, p. 185).

$$c = \frac{1}{v_1 - 1}, \quad c_0 = -\frac{c v_2}{v_1}, \quad c_1 = -\frac{c v_3 + c_0 v_1}{v_1 + 1}, \text{ usw.}$$

Bleibt nun die Funktion $f(n)$ für alle folgenden n zwischen den positiven Grenzen A und B, so folgt aus den Gleichungen:

$$\varphi(n) a_n - \varphi(n+1) a_{n+1} = f(n+1) a_{n+1}$$

durch Addition:

$$\varphi(n)\, a_n = f(n+1)\, a_{n+1} + f(n+2)\, a_{n+2} + f(n+3) a_{n+3} + \cdots,$$

also liegt der Rest:

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$$

zwischen den Grenzen $\frac{\varphi(n)}{A} a_n$ und $\frac{\varphi(n)}{B} a_n$; der Rest r_n wird also in Teilen des letzten Gliedes a_n approximiert. In vielen Fällen wird $f(n)$ nur wachsen oder nur abnehmen, dann sind $f(n)$ und $f(\infty) = 1$ für A und B zu nehmen.

Die Brauchbarkeit dieses Verfahrens geht z. B. daraus hervor, daß *Kummer* damit die Reihe:

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots$$

aus den ersten zehn Gliedern ($n = 10$) bis auf 14 Stellen genau berechnet hat; dazu sind sonst mehr als 10000000 Glieder nötig.

15. Jede unendliche Reihe von Größen $s_0, s_1, s_2, s_3, \ldots$ läßt sich als Summenreihe der Reihe:

$$s_0 + (s_1 - s_0) + (s_2 - s_1) + \cdots$$

auffassen. Also auch die durch ein unendliches Produkt:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$$

definierte Reihe von Teilprodukten:

$$(1 + u_1), \quad (1 + u_1)(1 + u_2), \quad (1 + u_1)(1 + u_2)(1 + u_3), \text{ usw.},$$

deren Grenzwert der Wert des unendlichen Produktes heißt. Demnach ist das unendliche Produkt gleich der Reihe:

$$1 + u_1 + (1 + u_1) u_2 + (1 + u_1)(1 + u_2) u_3 + \cdots.$$

Sind z. B. alle $1 + u_n$ und alle $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ positiv, so ergibt das Konvergenzkriterium 7^{II}, daß das Produkt konvergiert, wenn ein $q < 1$ existiert, so daß für jedes n von einem bestimmten ab stets

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} + u_{n+1} = \frac{(1 + u_n)\, u_{n+1}}{u_n} \leqq q$$

ist. Sind erstens die u_n positiv, so müssen sie gegen Null abnehmen;

dann folgt, daß schon $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq q$ sein muß; und umgekehrt folgt hieraus, daß auch $\frac{u_{n+1}}{u_n} + u_{n+1}$ für hinreichend große n schließlich immer $\leqq q$ wird.

Sind die u_n negative echte Brüche, so *divergiert* das Produkt *gegen Null*, wenn die u_n nicht gegen Null zunehmen. In diesem Fall folgt aber wieder, daß auch schon $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq q < 1$ wird, und umgekehrt. Also kann dies Konvergenzkriterium in beiden Fällen dahin ausgesprochen werden, daß das Produkt konvergiert, wenn von einem bestimmten n ab $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq q < 1$ ist. Entsprechend sind schärfere Kriterien herzuleiten.

16. Der Wert des unendlichen Kettenbruches:

$$a_0 - \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \cdots}}}$$

ist der Grenzwert seiner Näherungsbrüche:

$$\frac{B_0}{A_0} = a_0, \quad \frac{B_1}{A_1} = a_0 - \frac{b_1}{a_1}, \quad \frac{B_2}{A_2} = a_0 - \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2}},$$

usw. Nun ist:

$$\frac{B_{n-1}}{A_{n-1}} - \frac{B_n}{A_n} = \frac{b_1 b_2 \cdots b_n}{A_n A_{n-1}},$$

also der Wert des Kettenbruches:

$$+\frac{B_0}{A_0} + \left(\frac{B_1}{A_1} - \frac{B_0}{A_0}\right) + \left(\frac{B_2}{A_2} - \frac{B_1}{A_1}\right) + \cdots,$$

gleich:

$$a_0 - \frac{b_1}{A_0 A_1} - \frac{b_1 b_2}{A_1 A_2} - \frac{b_1 b_2 b_3}{A_2 A_3} - \cdots,$$

worin A_1, A_2, A_3, usw. durch die Rekursionsformel:

$$A_n = a_n A_{n-1} - b_n A_{n-2}$$

aus $A_0 = 1$, $A_1 = a_1$ zu bestimmen sind. Auf Grund der Reihenentwicklung sind dann die Konvergenzkriterien für Kettenbrüche abzuleiten. Sind z. B. alle $b = 1$, was stets zu erreichen ist, so ergibt das geometrische Konvergenzkriterium II[ter] Art:

$$\text{Konvergenz, wenn } \left|\frac{A_{n-1}}{A_{n+1}}\right| \leqq q < 1;$$

das ist der Fall, wenn

$$\left|\frac{A_{n-1}}{A_n}\right| < p < 1,$$

denn dann ist

$$\left|\frac{A_{n-1}}{A_{n+1}}\right| \leq p^2 < 1;$$

und umgekehrt, wenn $\left|\frac{A_{n-1}}{A_n}\right|$ bis zu 1 hin wachsen, so auch die Quotienten

$$\left|\frac{A_{n-1}}{A_{n+1}}\right| = \left|\frac{A_{n-1}}{A_n}\right| \cdot \left|\frac{A_n}{A_{n+1}}\right|.$$

Cyklotechnie.[1])

An die unendlichen Prozesse, insbesondere an die Reihen knüpfen die Berechnungen der Zahl π der zweiten Periode an. Die älteste Reihe, die arctg-Reihe, benutzten Halley[2]) und A. Sharp[3]) (1699), um durch Einsetzen der Tangenten von

$$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{12}$$

die Zahl π auf 13 bis 72 Stellen zu berechnen. Ebenso berechnete De Lagny[4]), der die Reihe selbständig gefunden hatte, π mit tg π auf 127 Stellen (1719). Aber die Reihe konvergiert zu langsam[5]), man mußte zuviel Glieder summieren. Die schneller konvergierende arc sin-Reihe ist wegen der zusammengesetzten Koeffizienten zur Berechnung weniger geeignet. Newton berechnete aus ihr $\left(\text{mit } \arcsin\frac{1}{2}\right)$ 14 Stellen.[6]) F. C. Maier bestimmte aus dieser von ihm gefundenen Reihe π auf 4 Stellen, indem er $x = \frac{1}{2}$ setzte und nur 5 Glieder

---

1) Vgl. hierzu: De Morgan, Pennycyclopädia 19, London (1841), B. de Haan, Verhandelingen of Amsterdam 4 (1858), p. 22. Glaisher, Messenger of Math. Cambridge 2 (1873), p. 119, 3 (1874), p. 27. Schubert, Die Quadratur des Zirkels in berufenen und unberufenen Köpfen. Hamburg 1889.

2) S. Maseres, Scriptores logarithmici. London (1796).

3) S. Sherwins Mathem. tables (1705, 1706 usw.).

4) Mémoires de l'Ac. de Paris (1719), 144.

5) Wie schon Newton bemerkt (Brief vom 24. Okt. 1676 an Oldemburg): um 20 Stellen zu bekommen, braucht man $5 \cdot 10^9$ Glieder (etwa 1000 Jahre); mit $\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}$ erhält man 20 Stellen aus 55 bis 60 Gliedern, noch schneller aus $\arcsin\frac{1}{2}$.

6) Briefwechsel ed. Gerhardt I 1, 140. Commerc. LXII ed. Biot-Lefort 139.

summierte. Euler[1]) versuchte langsam konvergente Reihen, insbesondere auch die arc tg Reihe in schneller konvergierende zu überführen. Man kann seinen Satz etwas allgemeiner durch die Identität darstellen:

$$\frac{a}{z}+\frac{b}{z^2}+\frac{c}{z^3}+\frac{d}{z^4}+\cdots=\frac{a}{z+t}+\frac{at+b}{(z+t)^2}+\frac{at^2+2bt+c}{(z+t)^3}+\frac{at^3+3bt^2+3ct+d}{(z+t)^4}+\cdots.^{2)}$$

Aber einen wirklich fruchtbaren und dabei sehr einfachen Gedanken hatte Machin (1706)[3]), indem er $\frac{\pi}{4}$ als Summe von Bogen mit ganzzahligen Cotangenten darstellte. Er berechnete mit seiner Formel:

$$\frac{\pi}{4}=4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}$$

π auf 100 Stellen.[4]) Die einfachste Formel dieser Art ist die von Euler[5]) und Hutton[6]) (1746):

$$\frac{\pi}{4}=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3};$$

die von Euler:

$$\frac{\pi}{4}=5\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}+2\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{79}$$

ist für die zweite arc tg-Reihe (S. 258 (8)) bequem.

---

1) Inst. calc. diff. (1755), p. 281; also *vor* Maseres (vgl. Cantor IV, p. 271), der dieselbe Umformung fand. Phil. Trans. Lond. (1777), vol. 67, I p. 187. Über die Konvergenz s. Poncelet, Crelles J. 13 (1835), p. 6.

2) Die spätere Formel von J. Hellins (R. Soc. Trans. Lond. 84 [1794], 86 [1796], 88 [1798]:

$$\frac{x^m}{m}+\frac{x^{m+n}}{m+n}+\frac{x^{m+2n}}{m+2n}\cdots=\frac{x^m}{m(1-x^n)}-\frac{nx^{m+n}}{n(m+n)(1-x^n)^2}+\frac{n\cdot 2n\,x^{m+2n}}{m(m+n)(m+2n)(1-x^n)^3}+\cdots$$

ist offenbar nur ein Spezialfall davon.

3) S. W. Jones' Synopsis palmariorum matheseos (1706), p. 263, und Maseres, Script. log. III (1796), p. VII und 157.

4) Nach derselben Formel hat Bürmann (Hindenburgs Archiv 2 (1798), p. 487) 160 Stellen berechnet.

5) Briefe an Goldbach vom 9. April 1743 u. 28. Mai 1746 (Corresp. math. [ed. Fuß] I, p. 220). Nova acta 1793 (1798) XI, p. 133, 150. Über eine π-Berechnung aus einer halbkonvergenten Reihe auf 15 Stellen s. Comm. Acad. Petr. (1793) XI, 166.

6) Phil. Trans. 1776, 66, p. 476. Er gab drei solcher Formeln. Vgl. auch Maseres, Script. log. III, p. 219; Hellins, Phil. Trans. 2, (1794), p. 217; Glaisher, Messenger II (1873), p. 119.

B. Lamy hatte 128 Ziffern berechnet.[1]) Später berechnete Vega[2]) nach den Formeln:

$$\frac{\pi}{4} = 5 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{3}{79} = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{7}$$

(1789 und 1794) 126, bzw. 140 Stellen. Nach der letzteren wie nach der Machinschen Formel rechnete auch Clausen[3]), der 1847 248 richtige Stellen gab. Ende des 18. Jahrhunderts fand Baron Zach in der Radcliffe Bibliothek, Oxford, ein Manuskript eines unbekannten Autors, welches π auf 154 Stellen gab (152 richtige).[4]) Rutherford[5]) berechnete 1841 208 (152 richtige) Stellen aus:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{70} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{99},$$

und Dahse[6]) berechnete nach der Formel von v. Schulz (1844)

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{8}$$

205 (200 richtige) Stellen. K. Buzengeiger gab die Formel:

$$\frac{\pi}{4} = 8 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{10} - 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{515} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239}.$$ [7])

Besonders brauchbare Formeln dieser Art gab Gauss:[8])

$$\frac{\pi}{4} = 12 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{18} + 8 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{57} - 5 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239},$$

$$\frac{\pi}{4} = 12 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{38} + 20 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{57} + 7 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239} + 24 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{268}.$$

Rutherford[9]) gab 1853 440, W. Shanks[10]) in demselben Jahre 530, dann 607 Stellen. Richter[11]), diese Rechnungen nicht kennend, gab erst 333, dann 400, schließlich 500, W. Shanks[12]) 707 Stellen nach Machins Formel (1873/74).

---

1) S. Wolfram an Lambert, Lamberts Briefwechsel IV, p. 480.

2) Thesaurus logarithmorum (Leipzig 1794), p. 633, Nova acta 1790 (1795) IX, p. 41; s. auch Klügel, Hindenburgs Archiv 2, (Leipzig 1798), p. 308.

3) Astron. Nachr. 25, p. 207.

4) Vgl. R. Ball, Mathematical recreations and problems. London (1892), p. 172. Thibaut, Grundriß der reinen Mathematik, 4. Aufl., 1822, p. 314.

5) Phil. Trans. 1841, p. 283.

6) Crelles J. 27 (1844), p. 198.

7) S. Klügel I, p. 666.

8) Werke II, p. 525. Vgl. auch E. Frisby, Bull. of the philos. Soc. of Wash. I (1880), p. 57.

9) Proc. R. S. 6 (1853), p. 273.

10) ibid. p. 273.

11) Grunert Arch. 21 (1853), 22 (1854), 23 (1855), 25 (1855); Elbinger Anzeiger 1854, Nr. 85.

12) Proc. R. S. (1872/73) XXI, p. 318, (1873/74) XXII, p. 45; Contribut. to the math., Durham (1853), p. 86.

Man kann alle diese Formeln herleiten, indem man von der Identität ausgeht:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{y} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{y+x} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{y+z}, \text{ für } y^2+1 = xz.$$

Für $y = 1$, $x = 1$, $z = 2$ erhält man die Eulersche Formel, die einzige zweigliedrige für $\operatorname{arc\,tg} 1$. Zerlegt man in ihr $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}$ nach derselben Formel in $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}$, so bekommt man die eine Vegasche; zerlegt man aber $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}$, was auf zwei Arten möglich, so erhält man die Schulz-Dahsesche, und die Formel:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{13}\cdot$$

Diese drei sind also die einzigen dreigliedrigen, usw.

Das allgemeine Problem, die Gleichung:

$$k_1 \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x_1} + k_2 \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x_2} + \cdots + k_n \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x_n} = k\frac{\pi}{4}$$

in ganzen Zahlen aufzulösen, behandelt und löst C. Störmer[1]), eine Reihe solcher Formeln leitet mit einfachen Mitteln Th. Meyer[2]) her. Auch Euler und Klügel hatten übrigens die Frage schon allgemein angefaßt.[3])

Das Verfahren der arc tg-Zerlegung läßt sich natürlich auch unbegrenzt fortsetzen. Z. B. gibt die Identität

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a} = \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{b}\right) + \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{b} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{c}\right) + \cdots$$

$$= \operatorname{arc\,tg}\frac{b-a}{ab+1} + \operatorname{arc\,tg}\frac{c-b}{bc+1} + \cdots$$

für $a = 1$, $b = 3$, $c = 5, \ldots$

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}\frac{2}{4} + \operatorname{arc\,tg}\frac{2}{16} + \operatorname{arc\,tg}\frac{2}{36} + \cdots,$$

für $a = 1$, $b = 2$, $c = 3, \ldots$

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{13} + \cdots$$ [4])

---

1) Comptes rendus 122 (1896), p. 175, 225; Videnskabsselskabets Skrifter, Christiania 1895; Bull. d. l. soc. math. d. Fr. (1899). Arch. for Math. og Naturw. 19 (1906), p. 1ff., usw.

2) Hoffmanns Ztschr. f. math. u. naturw. Unterr. 35 (1904), p. 1.

3) Klügel, Hindenburgs Arch. 2 (1798), p. 308. Vgl. auch Pfaff, Disquisitiones analyticae (1794) I, § 10.

4) Euler, Nov. Comm. Petrop. IX 1737 (1744), p. 100; IX 1762/63 (1764), p. 40. J. Fr. Pfaff, Nova Acta X 1792 (1797), p. 123.

Auch Th. Meyer[1]) gab solche Reihen z. B.

$$\frac{\pi}{8} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{14} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2786} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{21\,624\,372\,024} + \cdots,$$

in der die Nenner die Rekursionsformel befolgen:

$$t_n = t_{n-1}^3 + 3t_{n-1}.$$

Von anderen Reihen für π erwähnen wir noch die von Landen[2])

$$\frac{\pi^2}{3} - 3 = \frac{1}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 5^2} + \cdots,$$

die z. B. aus Fourierschen Reihen zu folgern ist; eine Reihe von Ivory[3])

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{8}\right)^2 + \cdots,$$

die durch Spezialisierung aus einer Formel für den Ellipsenumfang folgt.

In Japan hatte Yoshihide Masunaga 1739 π aus der arc sin-Reihe auf 50 Stellen berechnet. Ajima (1737—1797) gab noch die Reihe, die aus S. 258 (5) und S. 225 (unten) folgt:

$$\frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) = x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k} \cdot x^{2k+1}$$

Rationale Näherungswerte für π gaben Y. Arima 1766:

$$\pi = \frac{5\,419\,351}{1\,725\,033} \text{ (auf 12 Stellen richtig)}$$

und

$$\pi = \frac{428\,224\,593\,349\,304}{136\,308\,121\,570\,117} \text{ (auf 30 Stellen richtig)},$$

für π^2 G. Kurushima († 1760)

$$\pi^2 = \frac{98548}{9985}.$$ [4])

Logarithmotechnie.

Dem Probleme der vorteilhaftesten Berechnung von π oder allgemeiner der Bogen zu rationalen Tangenten, der „Zyklotechnie", entspricht im Gebiet der hyperbolischen Funktionen die „Logarithmotechnie"[5]), die Aufgabe auf zweckmäßigste Weise die Logarithmen rationaler Zahlen zu berechnen. Hierfür sind ganz ähnliche Verfahren

1) l. c. 2) Mathematical Memoirs London 1780.

3) Edinb. Trans. IV (1798), p. 177.

4) P. Harzer, Die exakten Wissenschaften im alten Japan. Rede gehalten in Kiel 27. Januar 1905.

5) Dies Wort gebraucht zuerst Nicolaus Mercator als Titel der Schrift Logarithmotechnia sive Methodus construendi Logarithmos nova accurata et facilis. 1667.

anzugeben. An Stelle des Additionstheorems der Arcustangensfunktion tritt das des Logarithmus:

$$l\,ab = l\,a + l\,b.$$

Es kommt darauf an, durch zweckmäßige Zerlegung zu erreichen, daß man nur *rasch konvergente* Reihen zu summieren hat. Eine Anzahl solcher Zerlegungen hat Gregory[1]) gegeben. Z. B. zur Berechnung von $\log 2$ berechne man $10(\log 2) - 3 = \log\frac{1024}{1000} = \log\left(1 + \frac{24}{1000}\right)$ nach der Reihe für $\log(1+x)$. Dann hat man für 3 die Zerlegungen:

$$3^8 \cdot 5 = 32805 \qquad 2^{15} = 32768,$$

für 7:

$$100 \cdot 2^5 \cdot 3 = 2400, \quad 7^4 = 2401,$$

so daß man die rasch konvergente Reihe $l\left(1 + \frac{1}{2400}\right)$ zu summieren hat, usw.

Auch Gauss[2]) hat sich hiermit befaßt.

Vega[3]) empfiehlt zu demselben Zweck die Formel:

$$2lz - l(z-1) - l(z+1) = 2 \operatorname{arc\,ctg\,hyp}(2z^2 - 1);$$

ebenso neuerdings K. Zindler[4]) die folgende:

$$4lz - l(z-1) - l(z+1) - l(z^2+1) = 2 \operatorname{arc\,ctg\,hyp}(2z^4 - 1).$$

Dadurch lassen sich die Logarithmen als Aggregate von arc ctg hyp großer Zahlen darstellen.

---

1) De vera circuli et hyperbolae quadratura (Huygens Opera varia, Lugduni 1724, p. 457). Gauss (Werke II, p. 502) schreibt sie irrtümlich Huygens zu.

2) Werke II, p. 501.

3) Thesaurus logarithmorum, Vorrede.

4) Zeitschr. f. d. Realschulwesen 22 (1897), p. 398.

Siebenter Teil.

Konstruktive Approximationen.

Kapitel I.

Wurzeln.

Spezielle Approximationen.

Man muß vor allem unterscheiden, ob die zu approximierende Größe eine Zahl oder eine Funktion ist. Ist z. B. für die Würfelverdopplung eine Näherungskonstruktion aufzusuchen, also $\sqrt[3]{2}$ zu approximieren, so hat man von:

$$\sqrt[3]{2} = 1{,}25992106 \cdots$$
$$= 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{22 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}$$

geeignete Näherungswerte zu bilden; z. B. liefert der Wert:

$$\frac{349}{277} = 1{,}2599275 \ldots$$

eine sehr einfache und sehr genaue Approximation, indem man berücksichtigt, daß er sich in der Form:

$$\frac{2^2 + \left(\frac{5}{9}\right)^2}{1^2 + \left(1 + \frac{5}{9}\right)^2}$$

darstellen läßt. Man konstruiere zunächst über $AB = 1$ das Quadrat $ABCD$ und trage an AD das Stück $DF = \frac{5}{9}$, an DC das Stück $CE = 1$ ab; dann ist:

$$EF^2 = 2^2 + \left(\frac{5}{9}\right)^2,$$

$$BF^2 = 1^2 + \left(1 + \frac{5}{9}\right)^2.$$

Macht man dann noch $FJ = 1$, $FG = FE$ und zieht $GH \parallel BE$ und $JK \parallel BH$, so ist:

$$FK \doteq \sqrt[3]{2};$$

denn es ist:

$$FK : FJ = FH : FB$$
$$= FE^2 : FB^2.$$

Also:

$$FK = \frac{2^2 + \left(\frac{5}{9}\right)^2}{1^2 + \left(1 + \frac{5}{9}\right)^2} = \frac{349}{277} = 1{,}2599275\ldots$$

Man kann auch darauf ausgehen, $\sqrt[3]{2}$ statt durch rationale durch quadratisch irrationale Ausdrücke zu approximieren. Der einfachste Fall wäre der, daß man für $\sqrt[3]{2}$ eine näherungsweise geltende quadratische Gleichung aufsucht. Nun findet man die Näherungsgleichungen:

$$a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = 0$$

mit ganzen Zahlen a, b, c nach dem Jacobischen Algorithmus in folgender Weise[1]): Setzt man

$$(\sqrt[3]{2} - 1)^i = p_i + p_{i-1}(\sqrt[3]{2} + 2) + p_{i-2}(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1),$$

1) Crelles J. 69 (1868), p. 29 (spez. p. 57) = C. G. J. Jacobis Werke VI, p. 385 (spez. p. 417).

so ergibt sich zwischen den ganzen Zahlen p die Rekursionsformel:

$$p_{i+3} = -3(p_{i+2} + p_{i+1}) + p_i,$$

und da $p_0 = 1$, $p_1 = -3$, $p_2 = 6$ ist, so erhält man:

$$p_3 = -8,\ p_4 = 3,\ p_5 = 21,\ p_6 = -80,\ \ldots$$

und daraus z. B. die Näherungsgleichung:

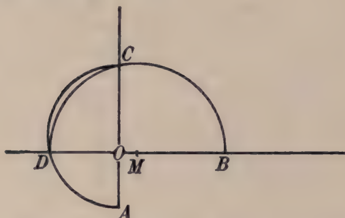
$$\sqrt[3]{4} + 8\sqrt[3]{2} - \frac{35}{3} = 0.$$

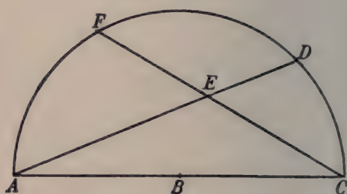
Man erhält hieraus für $\sqrt[3]{2}$ den Wert:

$$\sqrt[3]{2} \doteq 1{,}2599112\ldots$$

und die Konstruktion: Man teile die Strecke 8 von außen zum Produkte $\frac{35}{3}$, so ist der kleinere Abschnitt nahezu $\sqrt[3]{2}$.[1])

Eine mehr geometrische Konstruktion ist die von M. Stifel[2]) (1486—1567). In ihr ist zwar nur $\sqrt[3]{2} = \frac{5}{4}$, aber sie läßt sich beliebig verbessern; sie beruht auf Platos Figur zur Einschaltung von zwei Mitteln (s. S. 140).





Um zwischen $OA = 1$ und $OB = 2$ die zwei Mittel

$$OD = \sqrt[3]{2}, \quad OC = \sqrt[3]{4}$$

einzuschalten, schlage man um M, wo $OM = \frac{3}{8}$ (besser 0,37), mit MB den Kreis; der geht nahe durch C und D.

Wir erwähnen noch die von Huygens[3]): Es sei $AC = 2$, $\overset{\frown}{AF} = 60^0$, $\overset{\frown}{CD} = 45^0$, dann ist $AE = \operatorname{cosec} 52{,}5^0 = 1{,}2605\ldots \doteq \sqrt[3]{2}$; genauer müßte man $EF = CD$ machen.

---

1) Diese beiden Konstruktionen sind einfacher und genauer, wie diejenigen von Buonafalce und Boccali (Enriques, p. 224 ff.), welche $\sqrt[3]{2}$ bzw. gleich 1,25863 ..., 1,259909 ..., 1,260035 ... ergeben, und wie die erste von Mascheroni (l. c. art. 275), welche $\sqrt[3]{2}$ gleich 1,2592800 ... ergibt; die zweite Mascheronische gibt $\sqrt[3]{2} = 1{,}2599190\ldots$, steht also an Genauigkeit zwischen den beiden obigen.

2) Arithmetica integra 1544 fol. 119.

3) Huygens, Varia opera mathematica Bd. I, p. 1.

Mascheroni gibt Konstruktionen an, einen Würfel zu ver-3-, 4-, 5-, 6-, 7-, 8-fachen[1]), und zu hälften.[2])

Allgemeine Approximationen.

Diesen *speziellen* (numerischen) Methoden muß man die *allgemeinen* (algebraischen) an die Seite stellen, welche die zu approximierende *Funktion* durch eine konstruierbare, insbesondere eine rationale angenähert ausdrücken. Quadratwurzeln wurden approximiert, indem das geometrische gleich dem arithmetischen Mittel

$$\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2} \tag{1}$$

gesetzt wurde. Dabei wurde[3]) für a als erster[4]) Näherungswert die der gesuchten Wurzel nächste (nächst kleinere oder nächst größere) ganze Zahl gewählt, wenigstens im allgemeinen.[5]) Setzt man

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \quad b_1 = \frac{2ab}{a+b} \text{ (harmonisches Mittel)},$$

so ist $a_1 b_1 = ab$, und man kann in derselben Weise $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ usw. als bessere Näherungswerte berechnen. Das entsprechende Kubikwurzelverfahren: $\sqrt[3]{abc}$ zu approximieren durch die *drei* arithmetisch-harmonischen Mittel (s. S. 81):

$$a_1 = \frac{a+b+c}{3}, \quad b_1 = \frac{bc+ac+ab}{a+b+c}, \quad c_1 = \frac{3abc}{bc+ac+ab},$$

scheint weder im Altertum noch später angewandt worden zu sein, auch der speziellere Fall $c = a$ nicht:

$$\sqrt[3]{a^2 b} = \frac{2a+b}{3}, \tag{2}$$

---

1) l. c. art. 276. 2) l. c. art, 277.

3) So lautet die Vorschrift bei Heron (Metrica ed. Schöne, p. 18/19).

4) Ein zweiter Näherungswert ist z. B. bei Heron (l. c., p. 58/59)

$$\sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{17}{12}.$$

5) Abweichend, um möglichst einfache Zahlen zu bekommen, z. B. bei Heron (l. c.)

$$\sqrt{207} = \frac{1}{2}(15 + 13^2/_3) \text{ (p. 56/57)}, \quad \sqrt{96} = \frac{1}{2}(9 + 10^2/_3) \text{ (p. 132/133)},$$

$$\sqrt{126^3/_4} = \frac{1}{2}(12 + 10{,}5)$$

(mit Vernachlässigung des Bruchs im Radikanden, p. 144/145); der Bruch in der Wurzel wird gelegentlich durch einen für die weitere Rechnung einfacheren ersetzt, z. B. p. 157

$$\frac{1}{2}(12 + 12^1/_7) \text{ statt } \frac{1}{2}(12 + 12^1/_6).$$

obgleich er durch die Approximationen von Snellius und Orontius (s. S. 192) nahe gelegt war. Die Formeln (1) und (2) kann man auch schreiben:

$$\sqrt{a^2+b} = a + \frac{b}{2a}\text{[1]}, \tag{3}$$

$$\sqrt[3]{a^3+b} = a + \frac{b}{3a^2}; \tag{4}$$

sie repräsentieren also die Anfänge der Entwicklungen von

$$a\left(1+\frac{b}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad a\left(1+\frac{b}{a^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

nach dem binomischen Satz (s. S. 225) oder auch in Kettenbrüche (s. S. 264). Sie ergeben sich auch durch Anwendung des erwähnten *Newton*schen Verfahrens (s. S. 183), während die regula falsi ergäbe

$$\sqrt{a^2+b} = a + \frac{b}{2a+1}, \quad \sqrt[3]{a^3+b} = a + \frac{b}{3a^2+3a+1},$$

welche Werte mit (3) und (4) zusammen den genauen Wert der Wurzel *ein*schließen. Andrerseits ergibt sich (3) aus der bekannten rekurrenten Auflösung der quadratischen Gleichung $x^2 = 2ax + b$, nämlich

$$x = 2a + \frac{b}{x} = 2a + \frac{b}{2a+\frac{b}{x}} = \text{usw.},$$

der für die kubische Gleichung

$$x^3 = px^2 + qx + r,$$

der durch die *zwei* Gleichungen

$$x = p + \frac{q}{x} + \frac{r}{x^2},$$

$$x^2 = (p^2+q) + \frac{pq+r}{x} + \frac{pr}{x^2}$$

definierte Algorithmus entspricht.

Von den erwähnten, uns heute so naheliegenden Erweiterungen des Quadratwurzelverfahrens auf Kubikwurzeln findet sich, wie ge-

---

1) Übrigens wurde bei wiederholter Anwendung des Verfahrens die Korrektur $\frac{b}{2a}$ durch einen nahegelegenen *Stamm*bruch $\frac{1}{c}$ oder eine Summe solcher ersetzt (z. B. $\sqrt{54} = 7\,^1/_3$ statt $7\,^5/_{14}$ in Heron Stereometria ed. Hultsch (Berlin 1864) II, p. 184) und dann ebenso eine zweite Korrektur $\frac{1}{d}$ gefunden (z. B. $\sqrt{356} = 18\,^1/_2\,^1/_4\,^1/_8$ im Lib. Geepon. ed. Hultsch, p. 217; $\sqrt{3} = \frac{26}{15} - \frac{1}{780}$ in Archim., κύκλου μέτρησις). Vgl. hierzu P. Tannery, Mém. d. l. soc. des sciences physiques et naturelles de Bordeaux (2) 5 (Paris 1882), p. 161, 313.

sagt, keine vor. Um so interessanter ist ein auf ganz andrer Grundlage ruhendes Verfahren zur Kubikwurzelziehung, das Heron angibt.

Gebrochene Interpolation bei Heron und Gauss.

Heron[1]) hat ein besonderes Verfahren zur approximativen Kubikwurzelziehung. Er erläutert die allgemeine Regel an dem Beispiel $\sqrt[3]{100}$. Seine Rechnungsvorschrift lautet in der Übersetzung von *H. Schöne* wie folgt: „Nimm die 100 nächstkommende Kubikzahl, sowohl die nächstgrößere als die nächstkleinere. Es sind 125 und 64.

$$\begin{aligned} 125 - 100 &= 25 \\ 100 - 64 &= 36 \\ 5 \times 36 &= 180 \\ [4 \times 25 &= 100] \\ 180 + 100 &= 280 \\ \frac{180}{280} &= \frac{9}{14} \\ 4 + \frac{9}{14} &= 4^9/_{14}. \end{aligned}$$

So groß wird annähernd $\sqrt[3]{100}$ sein."

Die eingeklammerte Gleichung habe ich hinzugefügt; ohne sie ist das ganze Verfahren unverständlich. Aus diesem Rechnenschema abstrahiert man die Regel: „Hat man bereits $a > \sqrt[3]{x} > b$ gefunden, so ist zwar ein genauerer Wert von $\sqrt[3]{x}$ derjenige, welcher das Intervall $a \cdots b$ im Verhältnis der ‚Fehler' $a^3 - x : x - b^3$ teilt (Interpolation nach Proportionalteilen oder regula falsi); aber noch genauer ist es das Teilungsverhältnis im Verhältnis von $b : a$ zu verkleinern." Damit ist zugleich der empirische Weg angedeutet, auf dem Heron vielleicht diese Regel erhalten hat. Er ist damit zu einer merkwürdig guten, außerdem der Verallgemeinerung fähigen Näherungsmethode gelangt Um das zu zeigen, sei $f(x)$ eine reelle, im Intervall $x_0 < x_1$ stetige Funktion. Es soll der Wert $f(x)$ für $x_0 < x < x_1$ aus den bekannten Werten $f(x_0)$, $f(x_1)$ näherungsweise ermittelt werden. Die regula falsi ergibt:

$$f(x_1) - f(x) : f(x) - f(x_0) = x_1 - x : x - x_0,$$

also:

$$f(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x_0 - x}{x_0 - x_1} f(x_1);$$

das ist der einfachste Fall von *Lagranges* Interpolationsformel (s.

1) Metrica (ed. H. Schöne, Leipzig 1903), p. 178, 179.

S. 218). Setzt man allgemeiner, die regula falsi gewissermaßen korrigierend:

$$f(x_1) - f(x) : f(x) - f(x_0) = \alpha(x_1 - x) : \beta(x - x_0),$$

so erhält man

(1) $$f(x) = \frac{\alpha(x_0 - x) f(x_1) + \beta(x - x_1) f(x_0)}{\alpha(x_0 - x) + \beta(x - x_1)},$$

und es ist jetzt die Frage, wie man das unbekannte Korrekturverhältnis $\alpha : \beta$ zweckmäßig zu wählen habe. Die rechte Seite in (1) stimmt für $x = x_0$ und $x = x_1$ mit der linken überein. Man kann z. B. verlangen, daß diese Übereinstimmung noch *für einen weiteren Wert* $x = x_2$ stattfindet und kann aus dieser Forderung das Verhältnis $\alpha : \beta$ berechnen. Setzt man zur Abkürzung

$$f(x_0) = y_0, \quad f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2, \quad f(x) = y,$$

so erhält man die Formel:

$$y = \frac{y_1 y_2 (x - x_0)(x_1 - x_2) + y_2 y_0 (x - x_2)(x_2 - x_0) + y_0 y_1 (x - x_2)(x_0 - x_1)}{y_0 (x - x_0)(x_2 - x_1) + y_1 (x - x_1)(x_0 - x_2) + y_2 (x - x_2)(x_1 - x_0)},$$

die das einfachste Beispiel von *Cauchys*[1]) Interpolation durch eine gebrochene Funktion repräsentiert. Man kann zweitens fordern, daß die rechte Seite in (1) sich *im ganzen Intervall* $x_0 \cdots x_1$ der Funktion $f(x)$ möglichst nahe anschmiegt. Das kann *entweder* nach der *Gauss*schen Forderung erfolgen, so daß die *Summe der Fehlerquadrate* der Formel (1) im Intervall $x_0 \cdots x_1$ ein Minimum wird (was die Ausdehnung des von *Tchebycheff*[2]) für *ganze* Interpolation gelösten Problems auf *gebrochene* Interpolation wäre), oder nach der *Poncelet-Tchebycheff*schen, so daß der *größte Fehler* der Formel (1) im Intervall $x_0 \cdots x_1$ ein Minimum wird. Diese Forderungen führen nicht zu einfachen Bestimmungen des Verhältnisses $\alpha : \beta$. Stellen wir jetzt folgende Aufgabe: Unter den Hyperbelbogen:

$$y = \frac{\alpha(x_0 - x) y_1 + \beta(x - x_1) y_0}{\alpha(x_0 - x) + \beta(x - x_1)} \qquad (x_0 \leqq x \leqq x_1)$$

denjenigen auszuwählen, welcher sich am engsten an den Kurvenbogen:

$$y = f(x) \qquad (x_0 \leqq x \leqq x_1)$$

anschmiegt; und zwar in *der* Weise, daß der *größere* der beiden Quotienten $\frac{y_0'}{f'(x_0)}, \frac{y_1'}{f'(x_1)}$, welche den Richtungsunterschied beider Bogen an den Endpunkten (x_0, y_0), (x_1, y_1) messen, möglichst klein wird. Nun findet man

1) A. L. Cauchy, Analyse algébrique (Paris 1821), p. 527.

2) Liouv J. (2) 3 (1858), p. 289 = Oeuvres I (Petersburg 1899), p. 201.

$$y_0' = \frac{\alpha}{\beta} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

$$y_1' = \frac{\beta}{\alpha} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

also bleibt für jede Wahl des Verhältnisses $\alpha : \beta$ das Produkt $y_0' y_1'$, also auch das Produkt $\frac{y_0'}{f'(x_0)} \frac{y_1'}{f'(x_1)}$ unverändert; demnach wird der größere der beiden Quotienten (zugleich auch die Summe ihrer Quadrate und die Summe ihrer absoluten Werte) möglichst klein, wenn beide gleich werden. Aus

$$\frac{y_0'}{f'(x_0)} = \frac{y_1'}{f'(x_1)}$$

folgt aber

$$\frac{f'(x_0)}{f'(x_1)} = \frac{y_0'}{y_1'} = \frac{\alpha^2}{\beta^2},$$

also:

$$\alpha : \beta = \sqrt{f'(x_0)} : \sqrt{f'(x_1)}.$$

Das entspricht der Heronischen Formel, denn für den Fall

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

wird

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}},$$

also:

$$\alpha : \beta = x_0^{-\frac{1}{3}} : x_1^{-\frac{1}{3}} = f(x_1) : f(x_0),$$

was zu beweisen war.[1]) Bei Kurvenbogen, die, wie bei $y = \sqrt[3]{x}$, ganz konvex oder ganz konkav sind, kann man das Verhältnis

$$\alpha : \beta = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} : \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

auch als das geometrische Mittel aus dem größten und dem kleinsten Werte dieses Verhältnisses definieren, da diese, wie geometrisch ersichtlich, an den Endpunkten des Bogens angenommen werden und die Werte haben:

$$f'(x_1) : \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad \text{und} \quad \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} : f'(x_0).$$

Es ist sehr merkwürdig, daß sich ein zweites Beispiel für die *Heron*sche Interpolation bei *Gauss*[2]) findet. Ist nämlich

$$y = \text{arc ctg}\, x$$

---

1) Solche Fälle pflegte Kronecker in seinen Vorlesungen treffend mit den Worten zu kennzeichnen: Die Auflösung ist gegeben, die zugehörige Aufgabe wird gesucht.

2) Werke VIII, p. 129.

die zu interpolierende Funktion, so wird

$$\alpha^2 : \beta^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 : \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = -\sin^2 y_0 : -\sin^2 y_1,$$

also:

$$\alpha : \beta = \sin y_0 : \sin y_1.$$

Gauss nimmt zwar $\alpha : \beta = y_0 : y_1$, was aber wesentlich dasselbe ist, da er nur *kleine* y im Auge hat. Dieselbe Interpolation wendet er noch bei kleinen arc cosec an.

Quadratisch irrationale Approximationen findet man z. B. durch Ausdehnung des Jacobischen Algorithmus (S. 283) auf Näherungsgleichungen von der Form [1]):

$$u(x) + v(x)\sqrt[3]{x} + w(x)\sqrt[3]{x^2} = 0;$$

oder durch Übertragung der Laguerreschen Approximation (s. S. 222) auf Gleichungen mit nur *einer* reellen Wurzel, insbesondere auf die Dreiteilung eines Hyperbelsektors (s. S. 90).

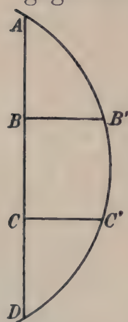
Das Entsprechende gilt für n^{te} Wurzeln oder andere Irrationalitäten.

Kapitel II.

Winkelteilungen.

Dreiteilungen.

Eine der ältesten mit Absicht und Bewußtsein als Approximation gegebene ist die von Albrecht Dürer.[2]) Er triseziert die Sehne AD des zu trisezierenden Bogens $\widehat{AD}$ durch die zu ihr senkrechten Geraden $[BB']$, $[CC']$, die den Bogen in B', C' schneiden, und nimmt das Mittel von AB', $B'C'$, $C'D$ als Sehne des gesuchten Bogendrittels.[3])



Ist diese Konstruktion deutlich von empirischem Charakter, so sind die von Snellius und Lambert theoretisch wohl begründet in den schon im fünften Teil, Kapitel II abgeleiteten Näherungsformeln.

Wir hatten S. 82 den approximativen Trisektionspunkt P, für den $OP = 2$ ist, gefunden[4]), während für den ge-

1) Solche Approximationen behandelt Tchebycheff, Mathem. Sbornik 2 (1867) = Oeuvres I (Petersburg 1899), p. 561.

2) Underweysung der messung mit dem zirckel unn richtscheyt. Nürnberg 1525.

3) Die Genauigkeit scheint am größten um 90° herum; s. A. G. Kästner, Geom. Abhandlungen. Göttingen 1790.

4) Diese Konstruktion führt z. B. auch E. Cominotto an (Trisezione approssimata dell' angolo, Padova 1895).

nauen Trisektionspunkt $OP = 2 \cos \frac{x}{3}$ ist. Der Unterschied dieser beiden Strecken beträgt:

$$2 - 2 \cos \frac{x}{3} = 2 \left(\frac{1}{9} \frac{x^2}{2} - \frac{1}{81} \frac{x^4}{24} + \cdots \right),$$

kann also in zweiter Annäherung gleich $\frac{2}{9}$ sin vers x gesetzt werden, woraus sich eine sehr einfache und sehr genaue Konstruktion ergibt, indem man den angenäherten Trisektionspunkt P um $\frac{2}{9} SR$ nach O hin verschiebt.

Etwas weniger genau ist *der* Punkt als Trisektionspunkt, den Lambert zur *Rektifikation* einführte; für ihn ist (S. 203)

$$OP = 2 - \frac{1}{5} \text{ sin vers } x.$$

Konvergente Konstruktionen zur Winkelteilung und Wurzelziehung.

Ist φ der Bogen, der in drei Teile geteilt werden soll, so wird die Konstruktion von $\frac{\varphi}{3}$ z. B. durch die Formel:

$$\frac{\varphi}{3} = \frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi}{4} + \frac{\varphi}{8} - \frac{\varphi}{16} + \cdots$$

auf fortgesetztes Bogenhalbieren zurückgeführt.[1])

Man kann das übersichtlich so beschreiben: Konstruiert man in der Reihe von Winkeln $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ von α_0, α_1 ausgehend jeden als arithmetisches Mittel der beiden vorhergehenden, so nähert man sich dem Winkel $\frac{\alpha_0 + 2\alpha_1}{3}$; also z. B. für $\alpha_0 = \varphi$, $\alpha_1 = 0$ dem Winkel $\frac{1}{3}\varphi$.

Ebenso kann die Konstruktion von:

$$\sqrt[3]{a_0 a_1^2}$$

vermittels der Formel:

$$\sqrt[3]{a_0 a_1^2} = a_0^{\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots} \; a_1^{\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \cdots}$$

1) Dieser naheliegende Gedanke findet sich öfter; s. z. B. Große, Hoffmanns Ztschr. f. math. u. nat. Unt. 35 (1904), p. 307.

durch bloße Konstruktionen geometrischer Mittel ausgeführt werden.[1]) Man konstruiere der Reihe nach:

$$a_2 = \sqrt{a_0 a_1}, \quad a_4 = \sqrt{a_2 a_3},$$
$$a_3 = \sqrt{a_1 a_2}, \quad a_5 = \sqrt{a_3 a_4},$$

usw., so daß in der Reihe a_0, a_1, a_2, ... jedes Glied das geometrische Mittel der beiden vorhergehenden ist. Die Größen a_h nähern sich mit wachsendem h der gesuchten Kubikwurzel. Solche Konstruktionen, die aus einer unbegrenzten Anzahl von Schritten bestehen, sollen *konvergierende* genannt werden.

Auch die n-Teilung des Winkels und die Ausziehung der n^{ten} Wurzel ist durch konvergierende Konstruktionen ausführbar, und zwar auf Grund solcher Gleichungen, wie z. B.:

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \cdots, \quad \frac{1}{7} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^3} + \cdots,$$

da sich ja allgemein jeder Bruch in einen dyadischen (überdies periodischen) entwickeln läßt.

Winkel-n-Teilung.

Der approximative Trisektionspunkt hat eine zweite Bedeutung. Ist $\widehat{RT} = \frac{1}{3}\widehat{RQ}$, so schneidet PT von $QS = \sin x$ nahezu $\frac{1}{3}$ ab (Fig. S. 291); denn es ist:

$$\frac{\sin\frac{x}{3}}{\frac{1}{3}\sin x} \doteq \frac{2+\cos\frac{x}{3}}{2+\cos x}.$$

Allgemeiner wollen wir denjenigen Punkt P mit $OP = z$ aufsuchen, der in derselben Weise die n-Teilung des Bogens vermittels der n-Teilung der zugehörigen Sinusstrecke ermöglicht, für den also:

$$\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{1}{n}\sin x} = \frac{z+\cos\frac{x}{n}}{z+\cos x}$$

ist. Das gibt in erster Annäherung wieder $z \doteq 2$, in zweiter Annäherung:

$$z \doteq 2 - \frac{1+\frac{1}{n^2}}{5}\,\text{sin vers}\, x,$$

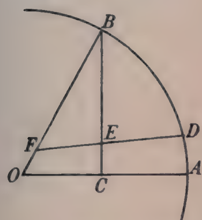
also für $n = 3$ den oben erwähnten Trisektionspunkt; für $n = \infty$ den Lambertschen Rektifikationspunkt.

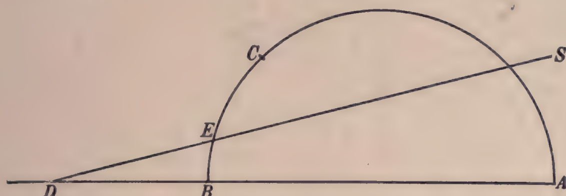
---

1) Buteo, Ad problema cubi duplicandi. Opera geometrica 1554. Neuerdings wieder angegeben von Vargiu 1877; s. Enriques, p. 223.

Für kleine Winkel oder für Teilung in eine große Anzahl Teile kann man demnach den Lambertschen Rektifikationspunkt als Teilungspunkt benutzen. Hier wird also die Teilung des Bogens zur Teilung einer Strecke durch dieselben Geraden in Beziehung gesetzt. Dieser Gedanke, der auch dem Verfahren des Philipp von Landsberg zugrunde liegt (s. S. 191), ist später in verschiedenen Formen wieder aufgetreten.

Z. B. sei $[DE]$ die Gerade, welche von dem Bogen $\widehat{AB}$ den Bogen $\widehat{BD} = \frac{2}{n}\widehat{AB}$ und von dem Sinus BC das Stück $BE = \frac{2}{n}BC$ abschneidet. Man kann nach dem Schnittpunkte $F = ([OB][DE])$ fragen. In erster Annäherung ist $BF = \frac{3}{n+1}BO$.[1])



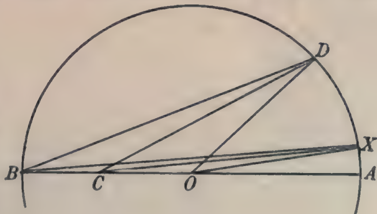


Auf demselben Gedanken von proportionalen Teilungen von Bogen und Strecke durch dieselben Geraden beruht die folgende Winkelteilung.[2]) Teilt man den Bogen BC in E, den Durchmesser AB in D so, daß

$$BD : AD = BE : EC$$

ist, also den Bogen von innen in demselben Verhältnis wie den Durchmesser von außen, so gehen die Teilungsgeraden DE nahezu durch einen Punkt S. Diesen Punkt S findet man also sehr einfach, indem man z. B. das Teilungsverhältnis gleich $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{2}$ nimmt. Diese Konstruktion liefert wie auch die obige die Teilung eines Winkels nicht nur in eine ganze Anzahl von Teilen, sondern in beliebigem Streckenverhältnis.

Lampe[3]) macht die Bemerkung, daß die Strahlen $[OX]$ den Winkel AOD in demselben Verhältnis teilen wie die Strahlen $[BX]$ den Winkel ABD, und daß infolgedessen dasselbe näherungsweise für die Strahlen CX und den Winkel ACD statthat, wenn C ein beliebiger Punkt in der Nähe von OB



1) Fr. Strempel, Progr. Rostock 1894.
2) Dorr, Progr. Elbing 1893.
3) Crelles J. 100 (1887), p. 364.

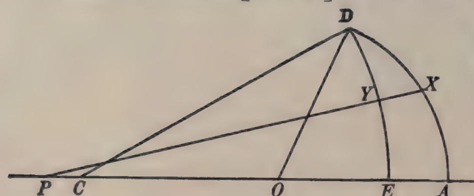
ist. Das gibt für jeden (spitzen) Winkel $ACD = \varphi$ eine approximative Dreiteilung, indem man z. B.

$$AOD = \frac{3}{2}\varphi, \quad ABD = \frac{3}{4}\varphi$$

wählt; oder eine Fünfteilung für

$$AOD = \frac{5}{4}\varphi, \quad ABD = \frac{5}{8}\varphi \text{ usw.}$$

Allgemeiner kann man nach der Lage des Punktes P fragen, dessen Geraden $[PYX]$ die zu den Winkeln $\alpha = AOD$ und $\beta = ACD$ gehörigen Bogen $\widehat{AD}$ und $\widehat{ED}$ nahezu proportional teilen. Nimmt man $OA = 1$, so findet man in zweiter Annäherung:



$$OP \doteq 2 - \frac{\beta}{\alpha + \beta}.$$

Daraus ergeben sich zu jedem Winkel β approximative Teilungspunkte für einen gegebenen Winkel α und umgekehrt. Wählt man z. B. $\beta = 0$, also $CD \parallel OA$, so geht der zu β gehörige Kreisbogen in die halbe Sehne von 2α über, und es wird $OP = 2$, man erhält also den Snelliusschen Trisektionspunkt. Wählt man z. B. $\beta = \frac{3}{4}\alpha$, so wird $OP = \frac{11}{7}$, usw.

Winkelteilungen sind in Menge aufgestellt worden, aber sie sind fast immer schlechter als die klassischen von Snellius und Lambert, meist nicht einmal so gut, wie die von Dürer (S. 290).

Z. B. die von *König* kommt darauf hinaus, daß man von dem vermittels des Snelliusschen Rektifikationspunktes rektifizierten Bogen den n^{ten} Teil als sin des n^{ten} Teiles des Bogens nimmt. Genauer ist es offenbar, wenn man von dem mit Hilfe des Snelliusschen oder des Lambertschen Rektifikationspunktes rektifizierten Bogen den n^{ten} Teil wieder mit dem Snelliusschen oder dem Lambertschen Punkt (nach S. 204) arkufiziert.

Von großem Interesse ist die approximative Bogenteilung von Laguerre.[1])

Die Gleichung:

$$\text{sin vers } \alpha - n^2(1-x) + \binom{n}{2}\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \cdot (1-x)^2 - \cdots = 0$$

hat nach S. 251 die *größte* Wurzel $x = \cos\frac{\alpha}{n}$. Wir wenden auf sie

1) Nouv. ann. de math. (2) 19 (1880), p. 161, Comptes rendus 90 (Paris 1880), p. 304 = Oeuvres I (Paris 1898), p. 98, 106.

die Laguerresche Wurzelapproximation (s. S. 222) an, indem wir $x_0 = 1$ setzen. Wir erhalten:

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{\sin\operatorname{vers}\frac{\alpha}{n}} \doteq \frac{n + (n-1)\sqrt{n^2 - \frac{n(n+1)}{3}\sin\operatorname{vers}\alpha}}{\sin\operatorname{vers}\alpha};$$

das andere Vorzeichen der Quadratwurzel gibt approximativ:

$$\frac{1}{\sin\operatorname{vers}\frac{n-1}{n}\alpha}.$$

Die Laguerresche Formel kann zur Konstruktion von $\sin\operatorname{vers}\frac{\alpha}{n}$ aus $\sin\operatorname{vers}\alpha$ dienen, also zur Bogenteilung.

Setzt man speziell $\alpha = \frac{\pi}{3}$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$, so erhält man:

$$\frac{1}{\sin\operatorname{vers}\frac{\pi}{3n}} \doteq 2n + (n-1)\sqrt{\frac{2n(5n-1)}{3}}$$

und

$$\frac{1}{\sin\operatorname{vers}\frac{\pi}{2n}} \doteq n + (n-1)\sqrt{\frac{n(2n-1)}{3}}.$$

Die erste Formel liefert rationale Werte für $n = \frac{u^2}{5(u^2-30)}$, wo u^2 ein zwischen 30 und 37,5 liegendes rationales Quadrat ist; die zweite für $n = \frac{u^2}{2(u^2-6)}$, wo u^2 ein zwischen 6 und 12 liegendes rationales Quadrat ist. Rationale Werte sind für die Kreisteilung besonders praktisch. Z. B. gibt die erste Formel für $u = 6$, $n = \frac{6}{5}$, $\frac{\pi}{3n} = 50^0$, $2\cos 50^0 = \frac{9}{7}$ als Seite eines regulären Sternneunecks. Setzt man in der zweiten $n = \frac{1}{x}$, so erhält man:

$$\cos\frac{\pi}{2}x \doteq 1 - \frac{x^2}{x + (1-x)\sqrt{\frac{2-x}{3}}}.$$

Die große Genauigkeit dieser Formel, und zwar im ganzen Intervalle von $x = 0$ bis 1 illustriert folgende Tabelle:

	Formel	$\cos\frac{\pi}{2}x$	Fehler
0^0	1	1	0,0000
9^0	0,9877	0,9877	0,0000
18^0	0,9512	0,9511	0,0001
24^0	0,9137	0,9135	0,0002
30^0	0,8662	0,8660	0,0002

	Formel	$\cos\frac{\pi}{2}x$	Fehler
40°	0,7661	0,7660	0,0001
45°	0,7071	0,7071	0,0000
50°	0,6428	0,6428	0,0000
54°	0,5878	0,5878	0,0000
60°	0,5000	0,5000	0,0000
70°	0,3422	0,3420	0,0002
75°	0,2591	0,2588	0,0003
80°	0,1739	0,1736	0,0003
85°	0,0874	0,0872	0,0002
90°	0	0	0

Um mit der Laguerreschen Formel die Bogen-n-Teilung auszuführen, sei zur Abkürzung:

$$\beta = \frac{\alpha}{n}, \qquad \begin{aligned} 1 - \cos\alpha &= \sin \operatorname{vers} \alpha = \varepsilon, \\ 1 - \cos\beta &= \sin \operatorname{vers} \beta = \delta, \end{aligned}$$

also:

$$\frac{\varepsilon}{\delta} = n^2 \left\{ \frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sqrt{1 - \frac{1 + \frac{1}{n}}{3}\,\varepsilon} \right\}.$$

Man konstruiere $p = 1 - \frac{1}{n}$, $q = 1 + \frac{1}{n}$, die vierte Proportionale zu 3, q, ε sei r; das geometrische Mittel aus 1 und $1 - r$ sei s; die vierte Proportionale zu $1, p, s$ sei t; dann teile man ε im Verhältnis von $\frac{1}{n} : t$, der erste Abschnitt ist $n\delta$.

Kapitel III.

Approximative Kreisteilung.[1]

Die ältesten Näherungsformeln, die sich auf reguläre Polygone beziehen, sind die Formeln von Heron:

$$s_5 = \frac{6}{5}, \text{ also } S_5 = \frac{3}{2}\left(\frac{35}{24}\right), \; S_6 = \frac{8}{7} \text{ oder } s_3 = \frac{7}{4},$$

1) Über die ältere Geschichte vgl. Schultz, Dissertatio mathematica de divisione circuli, Königsberg 1691, ferner A. J. Pressland, On the history and the degree of certain geometrical approximations. Edinburg 1891, Math. Gesellsch. Es handelt sich hier immer nur um das algebraische Problem der *Umfangs*teilung. Für das transzendente Problem der *Inhalts*teilung hat Heron (Metrica, p. 172/173) ein Beispiel: er dritteilt die Kreisfläche approximativ durch zwei Sehnen; diese dritteln nämlich i_{12} genau.

$$\left(S_6 = \frac{15}{13}, \text{ also } S_3 = \frac{45}{13}\right) s_7 = \frac{7}{8}, \left(S_7 = \frac{42}{43}\right) S_8 = \frac{24}{29}, \quad s_9 = \frac{2}{3},$$

$$\left(\text{also, wegen } \sqrt{2} = \frac{17}{12}, S_9 = \frac{12}{17}, \frac{27}{38}\right)$$

$$S_{10} = \frac{2}{3}, \; s_{11} = \frac{14}{25}, \left(\text{also, wegen } 25^2 = 24^2 + 7^2, \; S_{11} = \frac{7}{12}\right) S_{12} = \frac{8}{15}.$$ [1]

Dürer[2]) hat eine Neuneckskonstruktion, die auf

$$\text{tg } 20^0 = \frac{9}{25} = 0{,}36 \text{ (statt } 0{,}3640\ldots)$$

beruht, also genauer ist als die Heronische; sie ergibt $19^0\,47'\,56''$ statt 20^0. Noch genauer ist die von Laguerre[3]) $2 \sin 40^0 = \frac{9}{7}$, welche $40^0\,18'',7$ statt 40^0 ergibt (s. S. 295). Zufällig wurde diese Näherung auch von Hunrath[4]) gefunden.

Dürers Elfeckskonstruktion liegt

$$\sin \frac{\pi}{11} = \frac{9}{32} = 0{,}2813\ldots \text{ (statt } 0{,}2817\ldots)$$

zugrunde, welche $16^0\,20'\,6''$ statt $16^0\,21'\,49''$ ergibt. In seiner Dreizehneckskonstruktion wäre nach dem Wortlaut des Textes

$$\sin \frac{\pi}{13} = \frac{1}{4} \text{ (statt } 0{,}2413\ldots);$$

sie gäbe $14^0\,28'\,39''$ statt $13^0\,50'\,23''$, wäre also auffallend ungenau. Es liegt hier aber eine Verstümmelung des Textes vor; die *Figur* läßt den viel genaueren Wert

$$\sin \frac{\pi}{13} = \frac{23}{96} = \frac{1}{4} - \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{4} = 0{,}2395\ldots$$

ziemlich deutlich erkennen[4]); dem entspricht $\frac{\pi}{13} = 13^0\,51'\,43''$.[5])

---

1) Von diesen Formeln sind die eingeklammerten (die z. T., wie angedeutet, aus den andern folgen) in den Büchern von zweifelhaft Heronischem Ursprung (Heronis Alexandrini Geometricorum et Stereometricorum reliquiae ed. Hultsch, Berlin 1864, p. 134, 206, 218, 219), die übrigen in den Metrica (ed. H. Schöne, Leipzig 1903, p. 48—65) enthalten, bzw. dortigen Sätzen zu entnehmen. Betreffs der nicht-konstruierbaren s_9 und s_{11} (über s_7 s. u.) verweist Heron (l. c., p. 58, 62) auf eine Schrift des Hipparch, περὶ τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν. Über Ursprung und Entstehung der Formeln vgl. besonders P. Tannery, Mém. de la soc. des sciences physiques et naturelles de Bordeaux (2) 4 (1882), p. 184; W. Schmidt, Bibl. math. (3) 1 (1900), p. 319; Cantor I, p. 336. Heron hat auch (l. c., p. 134/137) rationale Approximationen der Seiten des regulären Ikosaeders und des regulären Dodekaeders.

2) Underweysung der messung mit dem zirkel unn richtscheyt. Nürnberg 1525. Cantor II, p. 225. 3) Laguerre l. c., S. 294[1]).

4) Hunrath, Bibl. math. VI (1905), p. 249.

5) Damit wird die Vermutung S. Günthers (D. geom. Näherungskonst. A. Dürers, Progr. Ansbach 1886, p. 13) hinfällig, daß hier eine Ideenverbindung mit der Formel $S_n = \frac{6}{n-1}$ des Lionardo da Vinci vorliege.

Die ungenauere Konstruktion hat Marpurg übernommen[1]); dieser konstruiert ferner das Elfeck aus tg $\frac{\pi}{22} = \frac{1}{7}$, was mit der Heronischen Formel übereinkommt und $16^0 15' 36''$ statt $16^0 21' 49''$ ergibt, das 17- und 19-Eck aus

$$s_{17} = \frac{11}{30}, \quad s_{19} = \frac{1}{3}.$$ [2])

Statt auf rationale Näherungswerte kann man auf quadratisch irrationale ausgehen. So hat Dürer eine Näherungskonstruktion für das Fünfeck[3]), die insofern von Interesse ist, als sie mit *einer* Zirkelöffnung ausgeführt wird.[4]) Für das Siebeneck ist die Regel: „Die Siebenecksseite ist nahe gleich der halben Dreiecksseite" von hohem Alter; sie findet sich vielleicht schon in dem von den Arabern Casiri und Abul Faragi dem Archimedes zugeschriebenen verlorenen „Liber de septangulo in circulo". Sie steht bei Heron[5]), Abul Wafa[6]) (940 bis 998); Jordanus Nemorarius (1170)[7]) bezeichnet sie als indische Regel, Dürer (l. c. ander Büchlein Nr. 11) „als einen gemeinen Weg, den man von Behendigkeit wegen in der Arbeit braucht". Kepler[8]) schreibt sie also mit Unrecht Dürer zu.[9]) Auch Lionardo da Vinci hat sie.

Diese Regel, die man auch in der rationalen Form $\cos\frac{2\pi}{7} = \frac{5}{8}$ darstellen kann, ergibt als Zentriwinkel $51^0 19' 4''$ statt $51^0 25' 43''$. Derartige Näherungswerte sind zu begründen bzw. aufzusuchen durch Kettenbruchentwicklung der Wurzeln von Kreisteilungsgleichungen. Z. B. ist $2\cos\frac{2\pi}{7} = \frac{5}{4}$ ein sehr guter Näherungswert der Gleichung (s. S. 83):

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0.$$

---

1) Marpurg, Anfangsgründe des Progressionalkalkuls (Berlin 1773), p. 435 ff.

2) Auch Oronce de Fine (De rebus mathematicis hactenus desideratis 1556) enthält Konstruktionen von s_3, s_5, s_7, s_{11}, s_{13}.

3) Chasles schreibt sie mit Unrecht Dürer zu; sie findet sich schon in der „Geometria deutsch", vgl. Cantor II, p. 413.

4) Solche Konstruktionen behandelt zuerst Abul Wafa, später Cardano, Tartaglia, Ferrari, Lionardo da Vinci u. a. Auch die späteren Griechen scheinen solche Konstruktionen gekannt zu haben (s. Pappus l. c. Cantor I, p. 383).

5) l. c., p. 54/55, unbewiesen; man hatte sich wohl durch den Versuch von der Brauchbarkeit überzeugt. Übrigens verweist hier Heron nicht, wie sonst oft, auf Archimedes.

6) Abul Wafa, Buch der geometrischen Konstruktionen, s. Cantor I, p. 638.

7) De triangulis, lib. IV. prop. 23, p. 43/44 der Ausgabe von H. M. Curtze, Mitt. d. Coppernicusver., Thorn 1887. VI. Cantor II, p. 76.

8) Harm. mundi Lib. I., p. 39. Kästner (l. c., p. 249) legt sie *nicht* Dürer bei, wie S. Günther meint (l. c., p. 8).

9) Auch die von Chr. Clavius (Geometria practica 1606 lib. VIII, Prop. 30, Theor. 12) dem Carolus Marianus Cremonensis zugeschriebene Regel kommt auf dasselbe hinaus. S. ferner M. Curtze, Bibl. math. (3) II (1901), p. 57.

Von dieser Art sind noch einige Konstruktionen Marpurgs (l. c.), beruhend auf

$$s_{11} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{2\pi}{11} = \frac{5}{6}\right) \quad \text{und} \quad S_9 = \sqrt{3} - 1,$$

und zwei weniger einfache Konstruktionen des 9- und des 11-Ecks. Ferner die Konstruktionen Mascheronis[1]) der Sehnen zu 1^0, $1'$ u. dgl.

Von größerem Interesse sind diejenigen Approximationen, die, wie die bei Heron[2]) $s_n \doteq \frac{6}{n}$ und die von Leonardo da Vinci[3])

$$S_n \doteq \frac{6}{n-1}$$

für unbestimmte n gelten.

Setzt man $\frac{1}{n} = x$, so erhält man Approximationen von z. B. $\cos\frac{\pi}{2}x$. Die älteste solche Näherungsformel hat Bhâskara[4]); derzufolge ist

$$s \doteq \frac{4d \cdot B(P-B)}{\frac{5}{4}P^2 - B(P-B)},$$

worin s die Sehne, d den Durchmesser, B den Bogen, P die Peripherie bedeuten. Diese merkwürdige Formel, deren Entstehung für rätselhaft gilt, nimmt sofort eine sehr ansprechende Gestalt an, wenn man in ihr

$$P = 2\pi,\ B = \pi(1+x),\ s = 2\sin\frac{\pi}{2}(1+x) = 2\cos\frac{\pi}{2}x,\ d = 2$$

setzt, nämlich:

$$\cos\frac{\pi}{2}x \doteq \frac{1-x^2}{1+\frac{1}{4}x^2}.$$

Diese Formel ist genau richtig für $x = 0, \pm 1, \pm\frac{2}{3}$. Man kann überhaupt nach approximativen Darstellungen von $\cos\frac{\pi}{2}x$ durch eine linear gebrochene Funktion von x^2 fragen. Verlangt man, was naturgemäß ist, daß sie an den Stellen $x = 0, \pm 1$ genau richtig sein soll, so hat sie immer die Form:

$$\cos\frac{\pi}{2}x \doteq \frac{1-x^2}{1+\varkappa x^2},$$

---

1) l. c. art. 232 ff.

2) Liber geeponicus, ed. Hultsch, Berlin 1864, p. 225.

3) Le manuscrit A de la bibliothèque de l'institut, publié par Ch. Ravaisson-Mollien, Paris 1881; M. Cantor, Leonardo da Vinci, Westermanns Monatshefte 1878, p. 369 ff.; P. Tannery, Bull. d. sc. math. et astr. (2) X, p. 13 ff.; Venturi, Essai sur les ouvrages physico-mathématiques de Leonardo da Vinci, Paris 1797.

4) Siddhânta-Ciromâni ed. Wilkinson, p. 263/268; Lîlavâtî ed. Colebrooke, 94 § 213.

und der Koeffizient $\varkappa$ ist aus weiteren Bedingungen zu bestimmen. Fordert man Richtigkeit der Formel an der Stelle $x = \pm \frac{2}{3}$, der einzigen, wo rationalem x rationale $\cos \frac{\pi}{2} x$ entsprechen[1]), so findet man $\varkappa = \frac{1}{4}$. Ähnliche Überlegungen könnten Bhaskara auf seine Formel geführt haben.

Diese Formel repräsentiert eine interpolatorische Approximation, da die Entwicklungen

$$\cos \frac{\pi}{2} x = 1 - \frac{\pi^2}{8} x^2 + \ldots,$$

$$\frac{1 - x^2}{1 + \varkappa x^2} = (1 - x^2)(1 - \varkappa x^2 + \cdots) = 1 - (\varkappa + 1) x^2 + \cdots$$

schon im zweiten Gliede nicht übereinstimmen; denn das ergäbe

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{5}{4} \quad \text{oder} \quad \pi = \sqrt{10},$$

den bekannten indischen Näherungswert (S. 184). Wählt man aber

$$\varkappa = \frac{\pi^2}{8} - 1 = 0{,}237 \cdots,$$

so findet bei $x = 0$ Oskulieren statt. Diesen Wert wollen wir mit $\varkappa_0$ bezeichnen. Ebenso kommt man durch Vergleich der Entwicklungen

$$\cos \frac{\pi}{2} x = \sin \frac{\pi}{2} (1 - x) = \frac{\pi}{2} (1 - x) - \cdots,$$

$$\frac{1 - x^2}{1 + \varkappa x^2} = \frac{2}{1 + \varkappa} (1 - x) - \cdots$$

entweder für $\varkappa = \frac{1}{4}$ auf den ägyptischen Näherungswert $\pi = 3{,}2$[1]) *oder* man bewirkt durch Wahl von $\varkappa$ Oskulieren bei $x = 1$, indem man $\varkappa = \frac{4}{\pi} - 1 = 0{,}273 \cdots$ wählt; diesen Wert bezeichnen wir mit $\varkappa_1$. Für $\varkappa_0$ findet bei $x = 0$ Annäherung *zweiter* Ordnung statt, für $\varkappa_1$ findet bei $x = 1$ Annäherung *erster* Ordnung statt. Ein guter Wert für $\varkappa$ wird also $\frac{2\varkappa_0 + \varkappa_1}{3} = 0{,}249 \cdots$ sein; der Wert des Bhaskara unterscheidet sich hiervon nur um ca. $\frac{1}{1000}$. Man kann $\varkappa$ aus anderen Forderungen bestimmen, z. B. als den Mittelwert von

$$\frac{1}{x^2}\left(-1 + \frac{1 - x^2}{\cos \frac{\pi}{2} x}\right)$$

---

1) Diesen Satz, dessen Richtigkeit sofort aus der Irreduktibilität der Kreisteilungsgleichung (s. S. 145) folgt, beweist Hessel (Archiv d. Math. u. Ph. (1) 48 (1868), p. 81) rein geometrisch, nachdem er ihn vorher in seiner Kristallometrie (1831) unbewiesen benutzt hatte.

2) S. M. Simon l. c., p. 45.

im Intervall von 0 bis 1. Oder aus der Forderung, daß die Summe der Quadrate der Fehler[1]) $\cos\frac{\pi}{2}x - \frac{1-x^2}{1+\varkappa x^2}$ oder daß der absolute Wert des größten Fehlers[2]) ein Minimum werde usw.

Ähnlich hat z. B. Poncelet[3]) die Funktion $\sqrt{1+x^2}$ im Intervall von 0 bis 1 durch die lineare $0{,}93432 + 0{,}42695x$ oder also, für $x = \operatorname{tg}\varphi$ den *Bogen* $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{4}$ durch eine *Gerade* approximiert. Solche Approximationen spielen in der Geradführung durch Gelenkmechanismen eine Rolle.

Allgemeiner hat man sich im vorliegenden Falle die Frage vorzulegen, wie sind die ganzen Funktionen n^{ten} Grades $A(x^2)$, $B(x^2)$ zu bestimmen, damit die Gleichung:

$$A(x^2)\cos\frac{\pi}{2}x + B(x^2) = 0 \qquad (-1 \leqq x \leqq +1)$$

„möglichst nahe" erfüllt sei; wo die Worte „möglichst nahe" wieder in verschiedener Weise zu interpretieren sind.

Natürlich kann man aus der Formel von Bhaskara auch umgekehrt x^2 näherungsweise durch $\cos\frac{\pi}{2}x$ ausdrücken, also einen rationalen Teil von π, und damit π selbst rektifizieren. Aber so aufgefaßt ist die Formel viel schlechter als diejenigen von Gregory, Snellius usw. (S. 188 ff.), da sie nicht oskulierend approximiert, wie man für diesen Fall wünschen muß. Doch ist es unrichtig, solche Approximationen deshalb geringzuschätzen[4]); das entspringt der älteren Anschauung, daß Approximationen eo ipso oskulierend sein müßten. Die Bedeutung interpolierender Approximationen ist ja heute nicht mehr zu verkennen.

Bei dem Inder El-Karchi findet sich eine ähnliche Formel[5]):

$$\frac{6}{s_n} \doteq \sqrt{n^2 - n + 6},$$

die für $n = 3, 4, 6$ richtig ist; vermutlich als Verbesserung der Heronischen $s_n \doteq \frac{6}{n}$ hergeleitet durch Interpolation aus den drei Formeln:

$$s_3 = \sqrt{3}, \quad s_4 = \sqrt{2}, \quad s_6 = \sqrt{1}.$$

---

1) Das ist das Prinzip von Gauss' Methode der kleinsten Quadratsummen; von dieser Art sind z. B. die Approximationen von Runge zur Darstellung von x^n durch $ax + bx^2$ (Schlöm., Ztschr. 45 [1900], p. 78); systematisch behandelt solche Approximationen A. Steinhausen, Aufstellung empirischer Formeln nach der Methode der kleinsten Quadrate. Leipzig 1889.

2) Tchebycheff behandelt derartige Approximationen, s. Oeuvres I (ed. par Markoff et Sonin, 1899), p. 201 ff., p. 499 ff.

3) Mécanique appliquée aux machines.

4) G. Eneström, Bibl. math. (3) VI (1905), p. 323 ff.

5) H. Suter, Verhandlungen des III. intern. Mathematikerkongresses, Leipzig (1905), p. 556. J. Kürschák, Bibl. math. (3) VI (1905), p. 306 ff.

Für $n = \frac{1}{x}$ erhält man aus ihr:

$$\cos 2\pi x \doteqdot \frac{1 - x - 12x^2}{1 - x + 6x^2}. \qquad (0 \leqq x < 0{,}4)$$

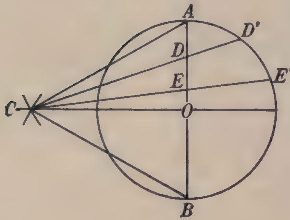
Daran lassen sich ähnliche Aufgaben knüpfen, wie an die Formel von Bhaskara.

Auch in neuerer Zeit sind solche Formeln aufgestellt worden, z. B. gibt E. Lakenmacher[1]) die Formel:

$$\sin^2 \frac{\pi}{2n} = \frac{1}{2n - 4 + \sqrt{2^n - 4n + 8}},$$

welche für $n = 3, 4, 5, 6$ genau richtig ist, also im Intervall von 15^0 bis 30^0 sehr gute Annäherung gibt und vermittels $\sin(30^0 \pm \varphi) = \frac{1}{2}\cos\varphi \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\varphi$ usw. auf andere Intervalle erweitert werden kann. Die Formel ist zwar nicht algebraisch in n, aber für alle ganzen n quadratisch irrational, also konstruierbar.

Während die Regeln von Bhaskara und El-Karchi unbeachtet geblieben sind, ist eine andere, die Kästner[2]) als Renaldinis Regel bezeichnet, vielfach behandelt worden; sie rührt wohl von Antoine de Ville (1628) her und wurde von Abraham Bosse[3]) (1665) verbessert. Sie besteht in Folgendem: Ist ABC gleichseitig, $AD = \frac{1}{n}AB$, so ist $\widehat{AD'} = \frac{1}{n}\widehat{AE'B}$, mit anderen Worten: die Geraden DD', welche Durchmesser und Halbkreis proportional teilen, gehen nahe durch einen Punkt C, für den $OC = \sqrt{3}$ ist. Sie kommt darauf hinaus:



$$\cos\frac{\pi}{n} = \frac{n-2}{4(n^2 - n + 1)}\left(3n + \sqrt{n^2 + 8n - 8}\right)$$

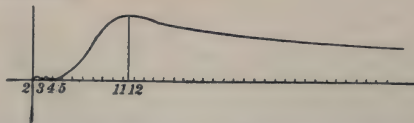
---

1) Archiv (2) IX (1890), p. 214.

2) Geometr. Abhandl., Göttingen (1790) I, S. 266. Vgl. auch v. Birkenstein, Ertzherzogliche Handgriffe des Zirkels und Lineals oder auserwählte Anfangsgründe zu den math. Wiss., Augsburg 1689. Steczokowski, Grunerts Arch. 24 (1855), p. 311. Plagge, Hoffm. Ztschr. 4 (1873), p. 356. V. Schlegel, Schlöm. Zeitschr. 22 (1877), p. 339. S. Günther, Ztschr. f. Realschulw. III. Wien (1878), p. 526. Letzterer gibt für den Fehler

$$\cos\frac{\pi}{n} - \frac{n-2}{4(n^2 - n + 1)}\left(3n + \sqrt{n^2 + 8n - 8}\right)$$

die graphische Darstellung:



3) De resolutione et compositione mathematica. Patavini (1668), lib. II, p. 367.

zu setzen. Der Fehler beträgt für den Zentriwinkel des Fünfecks etwa 2,′6, für den des Siebenecks 5,′3, für den des Achtecks — 11,′25.[1]) Um ein Bild von der Genauigkeit dieser Regel zu geben, setzen wir hier die genauen (s_n) und die der Regel entsprechenden Werte (s_n') der Polygonseiten nebeneinander:

$$\begin{array}{ll} s_3 = 1{,}7231 = s_3' & \\ s_4 = 1{,}4142 = s_4' & \\ s_5 = 1{,}1756 & s_5' = 1{,}1749 \\ s_6 = 1{,}0000 = s_6' & \\ s_7 = 0{,}8678 & s_7' = 0{,}8692 \\ s_8 = 0{,}7654 & s_8' = 0{,}7684 \\ s_9 = 0{,}6840 & s_9' = 0{,}6886 \\ s_{10} = 0{,}6180 & s_{10}' = 0{,}6239. \end{array}$$

Hier geben die den Durchmesser*enden* nahen Teilpunkte D die genaueren Teilpunkte D'; jedoch nicht in oskulierender Weise, da man sonst $OC = \frac{\pi}{2}$ wählen müßte. Dagegen liefert der Punkt C mit $OC = 2$ für die der *Mitte* O nahen Teilpunkte E die besten Teilpunkte E' des Kreises. Das Entsprechende gilt für einen *beliebigen* Bogen $\widehat{AB}$ (statt des Halbkreises) und seine Sehne. Denn es ist nahezu:

$$\frac{\sin x}{2 + \cos x} = \frac{n \sin \frac{x}{n}}{2 + \cos \frac{x}{n}},$$

wie aus der Formel des Nicolaus von Cusa folgt (s. S. 188). Demnach folgt für $RS = \frac{1}{n} RQ$, $QOU = x$ nahezu:

$$TV : PV = SR : PR = \frac{\sin x}{n} : 2 + \cos x \doteq \sin \frac{x}{n} : 2 + \cos \frac{x}{n},$$

also:

$$TV \doteq \sin \frac{x}{n}, \quad PV \doteq 2 + \cos \frac{x}{n}.$$

Um den Punkt P genauer zu berechnen, hat man, wie schon oben ausgeführt, OP aus der Gleichung zu bestimmen:

1) Daß die Renaldinische Regel eine Näherungsregel ist, erkannten zuerst Schultz l. c. und R. A. Wagner, Examen Methodi Renaldianae. Hann. 1700, p. 19. S. auch Jac. Bernouilli, Opera 1744, Disp. III de seriebus infinitis, Thes. 12. J. Chr. Sturm, Mathesis enucleata. Nürnb. (1695), p. 38.

$$\frac{\sin x}{OP + \cos x} = \frac{n \sin \frac{x}{n}}{OP + \cos \frac{x}{n}},$$

das gibt in zweiter Annäherung:

$$OP \doteqdot 2 - \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{5} \sin \operatorname{vers} x .$$

Ein ganz anderer Gedanke liegt Vietas approximativer Kreisteilung[1]) zugrunde. Ist $AB_n = s_n$, so behauptet er, daß

$$P_{n+1} P_n \doteqdot P_n P_{n-1}$$

ist; so daß also z. B. das Siebeneck aus dem Sechs- und dem Achteck gefunden werden könne u. dgl. Die Vietasche Behauptung kommt wegen $OP_n = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$ darauf hinaus:

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \doteqdot \frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{n+1} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n-1}}{2} \text{ }^{2)}$$

zu setzen, oder $\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$ als harmonisches Mittel zwischen $\operatorname{tg} \frac{\pi}{n+1}$ und $\operatorname{tg} \frac{\pi}{n-1}$ zu nehmen. Das ist um so genauer richtig, je größer n, weil $\frac{\pi}{n}$ genau harmonisches Mittel zwischen $\frac{\pi}{n+1}$ und $\frac{\pi}{n-1}$ ist. Der Vietaschen kann man, sie ergänzend, eine zweite, noch bessere an die Seite stellen, wenn man den tangens durch den sinus ersetzt, der ja dem Bogen noch näher gleich wird; dann hat man also

$$\operatorname{cosec} \frac{\pi}{n} \doteqdot \frac{\operatorname{cosec} \frac{\pi}{n+1} + \operatorname{cosec} \frac{\pi}{n-1}}{2} \text{ }^{2)}, \text{ d. h. } AP_n \doteqdot \frac{AP_{n+1} + AP_{n-1}}{2}$$

zu nehmen, wonach ebenso leicht zu konstruieren ist. Zum Vergleich der Genauigkeit dienen folgende Zahlen:

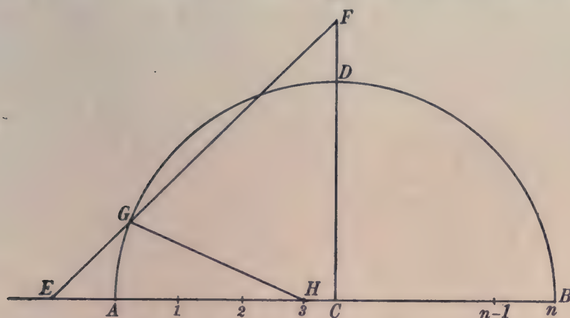
	Differenz		Differenz
$OP_4 = 1$		$AP_4 = 1{,}4142$	
	0,3764		0,2871
$OP_5 = 1{,}3764$		$AP_5 = 1{,}7013$	
	0,3557		0,2987
$OP_6 = 1{,}7321$		$AP_6 = 2{,}0000$	
	0,3442		0,3042
$OP_7 = 2{,}0763$		$AP_7 = 2{,}3042$	
	0,3379		0,3089
$OP_8 = 2{,}4142$		$AP_8 = 2{,}6131$	
	0,3333		0,3107
$OP_9 = 2{,}7475$		$AP_9 = 2{,}9238$	
	0,3302		0,3123
$OP_{10} = 3{,}0777$		$AP_{10} = 3{,}2361$	

1) Opera p. 283. S. Cantor II, p. 541. Er ist auch zur *Bogen*teilung brauchbar.

2) Genauer $\doteq$ statt $\doteqdot$. 3) Genauer $\underset{\cdot}{=}$ statt $\doteqdot$.

Eine sehr genaue Konstruktion ist diejenige des Herzogs Karl Bernhard zu Sachsen-Weimar-Eisenach: Es sei

$$AH = \frac{3}{n} AB, \quad AE = DF = \frac{1}{n} AB, \text{ dann ist } GH \doteq s_n.$$



Die Rechnung ergibt daraus:

$$\left(n \sin \frac{\pi}{n}\right)^2 \doteq \frac{n^2 - 8n + 48 - (n-6)\sqrt{n^2 - 4n - 4}}{4}$$

oder für $\frac{1}{n} = \frac{x}{2}$:

$$2 \cos \pi x = 1 + 4x - 12x^2 + (1 - 3x)\sqrt{1 - 2x - x^2}; \quad \left(x < \frac{1}{3}\right)$$

die Entwicklung nach Potenzen von x nach dem binomischen Satz (S. 224) ergibt

$$\cos \frac{\pi}{2} x = 1 - \frac{5}{2} x^2 +$$

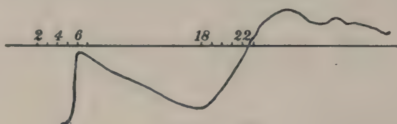
und läßt erkennen, daß es sich um interpolierende Approximation handelt. Auch stimmt sie im zweiten Grade mit der Bhaskara-Formel (S. 299) überein und oskuliert, wenn man in ihr $\pi = \sqrt{10}$ setzt.[1])

Ihre Genauigkeit geht aus folgender Tabelle hervor:

Für $n =$ 6	ergibt sich der Zentriwinkel	60^0		
„ $n =$ 7	„ „ „ „	$51^0\,24'\,40''$	statt	$51^0\,25'\,43''$,
„ $n =$ 9	„ „ „ „	$39^0\,56'\,20''$	„	40^0,
„ $n =$ 11	„ „ „ „	$32^0\,40'$	„	$32^0\,43'\,38''$,
„ $n =$ 13	„ „ „ „	$27^0\,38'\,40''$	„	$27^0\,41'\,32''$,
„ $n =$ 15	„ „ „ „	$23^0\,58'$	„	24^0,
„ $n =$ 17	„ „ „ „	$21^0\;\;9'\,20''$	„	$21^0\,10'\,35''$,
„ $n =$ 19	„ „ „ „	$18^0\,56'\,20''$	„	$18^0\,56'\,50{,}5''$,
„ $n =$ 21	„ „ „ „	$17^0\;\;8'\,12''$	„	$17^0\;\;8'\,34''$,
„ $n =$ 23	„ „ „ „	$15^0\,39'\,20''$	„	$15^0\,39'\;\;8''$,
„ $n =$ 45	„ „ „ „	$8^0\;\;1'\,20''$	„	8^0,
„ $n =$ 67	„ „ „ „	$5^0\,23'\,40''$	„	$5^0\,22'\,24''$,
„ $n =$ 89	„ „ „ „	$4^0\;\;3'\,40''$	„	$4^0\;\;2'\,42''$,
„ $n =$ 101	„ „ „ „	$3^0\,35'$	„	$3^0\,33'\,51''$.

1) Aber daraus kann man unmöglich einen Zusammenhang konstruieren, wie es C. Stengel (Hoffm. Ztschr. 35 (1904), p. 508) versucht.

Den Verlauf des Fehlers stellt S. Günther (l. c.) folgendermaßen graphisch dar:



Kapitel IV.

Rektifikation und Quadratur.

Quadrierbare Kreisbogenvielecke.

Von den ältesten Quadrierungsversuchen sind diejenigen des Hippokrates (s. S. 177[4]) von Interesse, da sie wirklich zu Resultaten führten, nämlich zur Quadratur gewisser Kreisbogenzweiecke und -dreiecke. Betrachten wir die Frage allgemein. Es sei $P_0 P_1, \dots P_{n-1}$ ein geradliniges n-Eck. Über seinen Seiten $P_0 P_1$, $P_1 P_2, \dots P_{n-1} P_0$ werden teils nach außen, teils nach innen Kreisbogen geschlagen, wodurch die ursprüngliche Fläche um Kreissegmente teils vermehrt, teils vermindert wird. Soll das entstandene *Kreisbogen-n*-eck wieder quadrierbar, d. h. flächengleich einem konstruierbaren Quadrat sein, so muß die algebraische Summe der hinzugekommenen Segmente oder auch der zugehörigen Sektoren quadrierbar sein. Sind $r_1, r_2, \dots, r_n$ deren Radien, $2\varphi_1$, $2\varphi_2, \dots, 2\varphi_n$ ihre Zentriwinkel, positiv bei Bogen nach außen, negativ bei Bogen nach innen gerechnet, so muß also die Summe:

$$\varphi_1 r_1^2 + \varphi_2 r_2^2 + \cdots + \varphi_n r_n^2 \tag{1}$$

quadrierbar sein, während zugleich die Größen:

$$r_1 \sin\varphi_1,\ r_2 \sin\varphi_2, \dots$$

gegebene Werte haben. Danach ist es leicht, beliebig viele quadrierbare Kreisbogen-n-Ecke herzustellen. Es sei z. B. $n = 3$; man wähle für φ_1, φ_2, φ_3 drei Zentriwinkel konstruierbarer regulärer Polygone:

$$\varphi_1 = \lambda\pi, \quad \varphi_2 = \mu\pi, \quad \varphi_3 = \nu\pi,$$

so daß also λ, μ, ν rationale, teils positive, teils negative Zahlen sind. Dann wähle man die Strecken x, y, z, die der Gleichung:

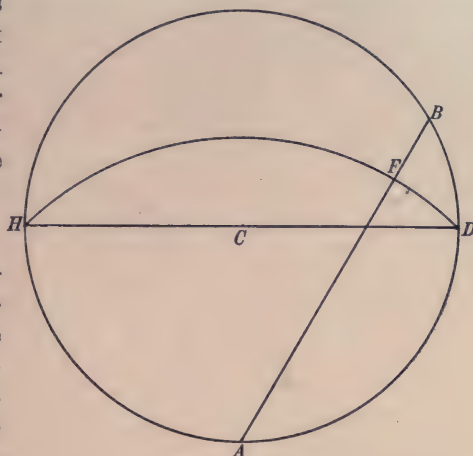
$$\frac{\lambda x^2}{\sin^2\lambda\pi} + \frac{\mu y^2}{\sin^2\mu\pi} + \frac{\nu z^2}{\sin^2\nu\pi} = 0 \tag{2}$$

genügen und aus denen ein Dreieck gemacht werden kann.

Das ist immer möglich, wenn der durch (2) dargestellte Kegel eine der Ebenen

$$x + y - z = 0$$
$$x - y + z = 0$$
$$-x + y + z = 0$$

reell schneidet; und das tritt stets bei genügend großem Öffnungswinkel des Kegels ein, wie es durch Wahl von λ, μ, ν immer erreicht werden kann. Von speziellen quadrierbaren Kreisbogendreiecken sind bekannt die Pelekoiden, die aus einem rechtwinkligen Dreieck entstehen, wenn man über den Katheten nach innen, über der Hypotenuse nach außen ähnliche Bogen schlägt; und die Figur BFD, für welche



$$AD = AF = AH;$$

$BCD = 30^0$.[1]) Die letzte Bedingung ist offenbar unwesentlich: alle Geraden durch A, die DH schneiden, teilen das Zweieck $DBHF$ in zwei quadrierbare Zweiecke, wie aus der obigen Erörterung folgt, da der zu $\widehat{BD}$ gehörige Sektor BCD den doppelten Zentriwinkel, aber das halbe Radiusquadrat hat, wie der zu $\widehat{FD}$ gehörige Sektor FAD.

Dagegen bieten die Kreisbogen*zwei*ecke (Lunulae) besondere Schwierigkeiten. Hier ist ja:

$$r_1 \sin \varphi_1 = r_2 \sin \varphi_2,$$

also müßte:

$$\frac{\varphi_1}{\sin^2 \varphi_1} - \frac{\varphi_2}{\sin^2 \varphi_2} = c$$

eine konstruierbare Größe sein. Schreibt man diese Gleichung:

$$\frac{1}{\sin^2 \varphi_1} - \frac{\varphi_2 : \varphi_1}{\sin^2 \varphi_2} = \frac{c}{\varphi_1},$$

so folgt, daß mit $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ zugleich $\frac{c}{\varphi_1}$ algebraisch, also nach dem Lindemannschen Satze (s. S. 331, 332) $\sin \varphi_1$ transzendent wäre, gegen die Annahme, daß $\sin \varphi_1$ konstruierbar. Also ist *entweder* $\varphi_1 : \varphi_2$ transzendent (quadrierbare Zweiecke dieser Art sind bisher nicht bekannt[2])); *oder* es ist $c = 0$, $\varphi_1 : \varphi_2$ algebraisch. Nun ist mit $\sin \varphi_1$ auch $\cos \varphi_1$, also auch

---

1) Bourrand, Mém. présentés. Paris VI (1774), p. 400.

2) Ebenso auch keine Kreisbogen*drei*ecke, bei denen $\varphi_1 r_1^2 + \varphi_2 r_2^2 + \varphi_3 r_3^2$ nicht Null.

$e^{i\varphi_1}$ algebraisch, ebenso $e^{i\varphi_2} = \left(e^{i\varphi_1}\right)^{\frac{\varphi_2}{\varphi_1}}$. Vermutlich besteht nun der Satz: Die p^{te} Potenz, wo p algebraisch, einer algebraischen Zahl, ist nur dann wieder eine algebraische Zahl, wenn p eine rationale Zahl ist[1]); dann folgt, daß $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}$ rational ist. In der Tat sind andere als solche quadrierbaren Zweiecke bisher nicht gefunden worden.

Hippokrates hatte die folgenden Fälle gefunden:

$$\sqrt{2} \cdot \sin\varphi = \sin 2\varphi \qquad \varphi = 45^0 \tag{1}$$

$$\sqrt{3} \cdot \sin\varphi = \sin 3\varphi \qquad \cos\varphi = \frac{\sqrt{1+\sqrt{3}}}{2} \tag{2}$$

$$\sqrt{3} \cdot \sin 2\varphi = \sqrt{2}\sin 3\varphi \qquad \cos 2\varphi = \frac{\sqrt{33}-1}{8}. \tag{3}$$

Th. Clausen[2]) fand auch die Fälle (2) und (3) und noch die folgenden zwei:

$$\sqrt{5}\sin\ \varphi = \quad \sin 5\varphi,\ \cos 2\varphi = \frac{\sqrt{5+4\sqrt{5}-1}}{4} \qquad (2\varphi < 90^0) \tag{4}$$

$$\sqrt{5}\sin 3\varphi = \sqrt{3}\sin 5\varphi,\ \cos 2\varphi = \frac{\sqrt{\frac{5}{3}}-1+\sqrt{\frac{20}{3}+\sqrt{\frac{20}{3}}}}{4} \qquad (2\varphi > 90^0) \tag{5}$$

Hinsichtlich der Möglichkeit weiterer Lösungen leitet Landau[3]) einen einschränkenden Satz her, der sich auf den Fall bezieht, daß $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ eine Primzahl p ist. Dann bestände also diese Gleichung:

$$\frac{\sin p\varphi}{\sqrt{p}} = \sin\varphi,$$

und $\sin\varphi$ sollte konstruierbar sein. Nun ist:

$$\frac{\sin p\varphi}{\sin\varphi} = p - \frac{p(p^2-1^2)}{3!}\sin^2\varphi$$
$$+ \frac{p(p^2-1^2)(p^2-3^2)}{5!}\sin^4\varphi - \cdots$$
$$+ (-1)^{\frac{p-1}{2}}\frac{p(p^2-1^2)\cdots(p^2-(p-2)^2)}{p!}\sin^{p-1}\varphi.$$

Der k^{te} Koeffizient ist eine durch $p \cdot 4^k$ teilbare ganze Zahl; denn es wird:

---

1) Oder der Quotient der Logarithmen zweier algebraischen Zahlen ist entweder rational oder transzendent. Das Kettenbruchkriterium von Störmer (Soc. math. frc. Bull. 28 (1900), p. 146) für solche Quotienten scheint hierzu nicht auszureichen, bezieht sich auch nur auf *reelle* algebraische Zahlen.

2) Crelles J. 21 (1840), p. 375; sie finden sich schon in der Dissertation von J. Wallenius (Abveae 1766).

3) Archiv d. Math. u. Ph. (3) 4 (1903).

$$\frac{p(p^2-1^2)(p^2-3^2)\cdots(p^2-(2k-1)^2)}{(2k+1)!}$$

$$= 2^{2k}\cdot p\,\frac{\frac{p-2k+1}{2}\cdot\frac{p-2k+3}{2}\cdots\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}\cdots\frac{p+2k-3}{2}\cdot\frac{p+2k-1}{2}}{(2k+1)!}$$

$$= 4^k p\cdot\frac{\left(\frac{p+2k-1}{2}\right)!}{\left(\frac{p-2k-1}{2}\right)!\,(2k+1)!},$$

und eine Zahl wie $\frac{(a+b-1)!}{a!\,b!}$ ist ganz, wenn a, b unter sich, also zu $a+b$ teilerfremd sind; das tritt für $a=\frac{p-2k-1}{2}$, $b=2k+1$ ein, denn ein Teiler wäre auch in $2a+b=p$ enthalten. Setzt man $4\sin^2\varphi=-x$, so erhält man die Gleichung:

$$\sqrt{p}=\frac{\sin p\varphi}{\sin\varphi}=p+pa_1x+pa_2x^2+\cdots+pa_{\frac{p-3}{2}}x^{\frac{p-3}{2}}+x^{\frac{p-1}{2}}$$

mit ganzen $a_1, a_2, \cdots a_{\frac{p-3}{2}}$. Quadriert man, so kommt:

$$p=p^2+pb_1x+\cdots+x^{p-1},$$

eine Gleichung, die nach dem Eisensteinschen Satze (S. 144) irreduktibel ist; also müßte p eine Gausssche Primzahl (S. 147) sein, damit x oder $\sin\varphi$ konstruierbar sein kann.

Der Fall $p=4$ führt auf eine reine Gleichung *dritten* Grades und scheint von Hippokrates, nach den Zeugnissen des Proklos-Geminos und des Erathosthenes durch Einschaltung zweier geometrischer Mittel behandelt worden zu sein. Auch Vieta[1]) behandelte ihn.

Konstruktive Approximationen von π.

Die Näherungswerte von

$$\pi-3=\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\ddots}}}}$$

sind $\frac{1}{7}$ (Archimedes); $\frac{1}{8}$ (Vitruv u. Dürer); $\frac{2}{15}$; $\frac{3}{22}$; $\frac{4}{29}$; $\frac{5}{36}=\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2$, woraus sich eine einfache Quadratur ergibt; $\frac{6}{43}$, $\frac{7}{50}$, $\frac{8}{57}$, $\frac{9}{64}=\left(\frac{3}{8}\right)^2$,

1) Variorum de rebus mathematicis responsorum. lib. VIII. 1593.

was wiederum eine einfache Konstruktion liefert; $\frac{10}{71}$ (Archimedes); $\frac{11}{78}, \frac{12}{85}, \frac{13}{92}, \frac{14}{99}, \frac{15}{106}, \frac{16}{113}$ (Adrian von Metz); $\frac{17}{120}$ (Ptolemäus), usw.

Der vorletzte dieser Näherungswerte:

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1}}}$$

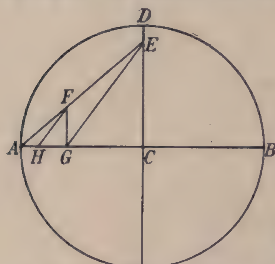
muß besonders gut sein, weil der nächstfolgende Teilnenner 292 besonders groß ist. In der Tat wird dieser Näherungswert, nämlich:

$$\frac{355}{113} = 3{,}141592 \cdots$$

auf 6 Stellen genau; überdies läßt er sich in folgender Form darstellen:

$$3 + \frac{4^2}{7^2 + 8^2},$$

wonach er leicht zu konstruieren ist.[1]) Es sei



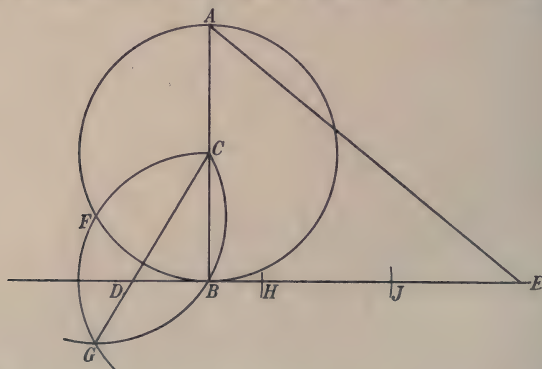
$$CD = 1,\ CE = \frac{7}{8},\ AF = \frac{1}{2},\ FG \parallel CD,$$
$$FH \parallel EG,$$

dann ist

$$AH = \frac{4^2}{7^2 + 8^2}.$$

Statt rationaler Näherungswerte kann man quadratisch irrationale aufsuchen und zur Konstruktion benutzen. Eine der ältesten dieser Art ist die von Kochansky[2]) mit *einer* Zirkelöffnung: Es sei

$$CA = CB = BF = BG = FG = DH = HI = IE,$$



1) Jakob de Gelder († 1848). Grunert, Archiv 7 (1849), p. 98.

2) Acta Eruditorum (Lipsiae 1685), p. 397; dieselbe taucht anonym in der Form $\frac{1}{3}\sqrt{6(20 - 3\sqrt{3})}$ wieder auf in Bibliothèque universelle III (1816), p. 221; s. Gergonnes. Ann. VIII (1818); ferner Crelle, Crelles J. 32 (1846), p. 91.

so ist:

$$AE = \sqrt{\frac{40}{3} - \sqrt{12}} = 3{,}141533 \cdots \doteq \pi.$$

Noch genauer ist diese[1]): Ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten $\frac{6}{5}$ und $\frac{3}{5}$ des Durchmessers sind, hat den Umfang:

$$1{,}8 + 3\sqrt{0{,}2} = \frac{9 + \sqrt{45}}{5} = 3{,}1416407 \cdots \doteq \pi$$

(in Teilen des Durchmessers).

Weitere Formeln sind:

$$\pi \doteq \frac{13}{50}\sqrt{146} = 3{,}141591952 \cdots {}^{2)}$$

$$\pi \doteq \frac{501 + 80\sqrt{10}}{240} = 3{,}1415926536 \cdots {}^{3)}$$

$$\pi \doteq \sqrt[4]{\left(9\,\frac{7}{22}\right)^2 + \left(2\,\frac{16}{22}\right)^2 + \left(1\,\frac{17}{22}\right)^2} = 3{,}1415926526 \cdots {}^{4)}$$

$$\pi \doteq 3 + \frac{\cos 15^0 + 0{,}45}{10} = 3{,}14159 \cdots {}^{5)}$$

$$\pi \doteq \sqrt{2} + \sqrt{3} = 3{,}14 \cdots {}^{6)}$$

$$\pi \doteq \sqrt{51} - 4 = 3{,}141 \cdots {}^{7)}$$

$$\pi \doteq \frac{7}{10^7} + \frac{13}{50}\sqrt{146} = 3{,}1415926531\,{}^{8)}$$

$$\pi \doteq \frac{5}{2}\sqrt{\frac{3^2 + 6^2 + 13^2 + 15^2}{3^2 + 6^2 + 13^2 + 8^2}} = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{439}{278}}\,{}^{8)}$$

$$10 \cdot \sqrt{\pi} \doteq \sqrt{30} + \sqrt{150}\,{}^{9)}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \doteq 0{,}57 + \sqrt{0{,}1}.\,{}^{10)}$$

Eine Formel, die trotz vier Wurzelziehungen nur 6 Stellen liefert, gab W. Hayden.[11]) Eine Reihe von Näherungskonstruktionen gaben

1) A. Kunze, Lehrbuch der Planimetrie I (2. Aufl.). Jena 1851, p. 278.
2) Specht, Crelles J. 3 (1828), p. 83; Gergonnes Ann. LXX.
3) Pioche, Gergonnes Ann. VIII (1818).
4) E. Reichenbächer, Hoffm. Ztschr. XXXII (1902), p. 275.
5) Jičinsky, s. Studnicka, Véstnik VIII, Nr. 6, p. 305.
6) D'Ocagne, Journ. de mathém. élém. (4) IV (1895), 77.
7) A. Pleskoh, ibid. 125; E. Lemoine, Bull. de la soc. math. de Fr. XXIII, 242.
8) Specht, Crelles J. 3 (1828), p. 405.
9) Kunze l. c., p. 278.
10) E. Lakenmacher, Archiv (2) IX (1890), p. 214.
11) Proc. Roy. Soc. Lond. XX (1872), 525.

F. J. van den Berg[1]) und A. H. Anglin[2]); solche mit dem Zirkel allein Mascheroni.[3])

Ebenso gehört hierher der aus

$$\cos x = \operatorname{tg} x \doteq \frac{\pi}{4}$$

folgende Wert[4]):

$$\frac{\pi}{4} \doteq \sqrt{s_{10}} = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = 0{,}786151\cdots \text{ statt } 0{,}785398\cdots,$$

ferner der indische Wert (S. 184)

$$\pi \doteq \sqrt{10}$$

und die von Huygens (S. 195[1])) z. B.:

$$\pi \doteq 3 + \frac{1}{10} s_4 = 3{,}14142\cdots,$$

der zwar nicht sehr genau, aber bequem zu konstruieren ist.

Um systematisch solche Approximationen zu finden, hat man im einfachsten Falle nach quadratischen Gleichungen (vgl. S. 283)

$$a + b\pi + c\pi^2 = 0$$

mit möglichst kleinen Zahlen a, b, c zu suchen. Eine solche Gleichung ist z. B.:

$$\pi^2 + \frac{39}{4}\pi = \frac{81}{2},$$

woraus sich die Konstruktion ergibt: Man teile $\left(10 - \frac{1}{4}\right)$ von außen zum Produkte $\frac{1}{2}9^2$, der kleinere Abschnitt ist $3{,}14158 \doteq \pi$.

Quadraturen.

Jede Rektifikation liefert natürlich zugleich eine Quadratur und umgekehrt. Will man aber gleich die Seite des dem Kreise flächengleichen Quadrates nahezu konstruieren, so sind solche Näherungswerte von π geeignet, für die auch $\sqrt{\pi}$ rational ist. Lambert[5]) hat eine Reihe derselben aufgestellt. Das Verhältnis der Quadratseite zum Durchmesser $\sqrt{\pi} : 2$ ist nahezu $7:8$, $8:9$, $31:35$, usw. Das erste Verhältnis fanden wir bei Baudhayana (S. 177), das zweite bei

1) Nieuw Archief voor wiskunde. Amsterdam IV (1878), p. 200.

2) Messenger of Math. (2) XIII (1884), p. 165; XIV (1885), p. 185.

3) Mascheroni, Géométrie du compas, frz. von Duprat (Paris 1798), 248; s. auch Gergonnes Ann. VIII (1818). 4) Crelle, Crelles J. 3 (1846), p. 91.

5) Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung II (Berlin 1770), p. 140: Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rektifikation des Zirkuls suchen, spez. p. 143.

Ahmes (S. 175), auch das dritte ist noch zufällig gefunden worden, wie Lambert (l. c. § 3) berichtet.

Will man aber die Diagonale des Quadrats zum Durchmesser in Beziehung setzen, so muß man die Näherungswerte von $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ aufsuchen. Einer der ersten ist $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \doteq \frac{10}{8}$, den Vitruv und Dürer benutzten (S. 184).

Konvergierende Rektifikationen und Quadraturen.

Solche finden sich schon bei den Indern. So hatten Arya-Bhatta und Brahmagupta (S. 184) die folgende Reihe von Formeln aufgestellt:

$$s_4 = \sqrt{2},$$
$$s_8 = \sqrt{2 - \sqrt{2}},$$
$$s_{16} = \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

aus der sich allgemein für $\pi \doteq 2^{r-1} s_{2^r}$ eine konvergierende Konstruktion ergibt. Vieta setzte diese Formeln in die Gestalt (S. 185):

$$\frac{1}{s_4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\frac{1}{2 s_8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},$$
$$\frac{1}{4 s_{16}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

woraus

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots$$

folgt. Das ist wohl die älteste Darstellung von π durch einen gesetzmäßigen Ausdruck. Die einzelnen Faktoren dieses Ausdruckes konstruiert man wie folgt:

$$a_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$a_2 = \sqrt{\frac{1+a_1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},$$
$$a_3 = \sqrt{\frac{1+a_2}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Die Formel von Vieta ist ein spezieller Fall der von Euler[1]) aufgestellten:

$$\frac{\sin x}{x} = \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{8}\cdot\cos\frac{x}{16}\cdots,$$

die für $x = \frac{\pi}{2}$ die Vietasche Formel liefert. Der Beweis der Eulerschen Formel ergibt sich aus:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}},$$

wenn man diese für $\frac{x}{2}, \frac{x}{4}, \frac{x}{8}, \cdots$ bildet, das Produkt der entstehenden Formeln nimmt und beachtet, daß

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}\right) = 1$$

ist. Diese Formel liefert eine ziemlich einfache konvergierende Konstruktion.[2]) Man konstruiere zunächst das rechtwinklige Dreieck OBA mit der Hypotenuse $OA = 1$ und dem Winkel $OAB = x$, im Anschluß hieran das rechtwinklige Dreieck OBC mit $\sphericalangle BOC = \frac{x}{2}$, darauf $\triangle OCD$ mit $\sphericalangle COD = \frac{x}{4}$ usw., dann ist:

$$OB = \sin x,$$

$$OC = \frac{\sin x}{\cos\frac{x}{2}}, \quad OD = \frac{\sin x}{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}},$$

$$OE = \frac{\sin x}{\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{8}},$$

$$OF = \frac{\sin x}{\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{8}\cdot\cos\frac{x}{16}} \text{ usw.,}$$

1) Comm. Acad. Petr. (1737) VII, p. 234, VIII, p. 157. Euler hat aus ihr π auf fünf Stellen berechnet. Diese Formel wurde oft wieder gefunden, so von A. Grunert (Abh. 1822), L. Réalis (Nouv. ann. (2) IX, 1870, p. 12), L. Seidel (Crelles J. 73, 1871, p. 273), Dobinski (Archiv 61, 1877, p. 434), Barrois (Gergonnes Ann. IV, 1813, p. 360), Grebe u. Scheffler (Archiv XII, 1849, p. 181, XIII, 1849, p. 419), Ligowski (Arch. 55, 1873, p. 218), Dickstein (ib. 56, 1874, p. 332), Glaisher (Messenger (2) VII, 1878, p. 191, IX, p. 124, s. auch Hart 191). Zu Vietas Formel s. auch Maurice Fouché (Bull. d. l. soc. de Fr. XVIII (1890), p. 135).

2) Diese Konstruktion findet sich oft in nur wenig verschiedenen Formen, z. B. bei Fontana, Mem. mat. fis. Soc. Ital. 1784; H. Scheffler, Verhältn. d. Arithm. z. Geom., Braunschw. 1846, p. 108, Grunerts Archiv XIII (1849), p. 419; Göring, Hoffm. Ztschr. f. Math. u. Nat. Unt. 35 (1904), p. 509.

$OZ = x$; zugleich wird $\Delta MOZ =$ Sektor OMB. Durch diese Konstruktion wird übrigens die Konvergenz des Eulerschen Produktes augenscheinlich.

Verwandelt man das Produkt in der Eulerschen Formel in Summen:

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{1}{4}x + \cos\frac{3}{4}x\right),$$

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{8} = \frac{1}{4}\left(\cos\frac{1}{8}x + \cos\frac{3}{8}x + \cos\frac{5}{8}x + \cos\frac{7}{8}x\right),$$

. . . .

so erhält man allgemein (wenn n eine Potenz von 2 ist):

$$\frac{\sin x}{x} = \lim_{n=\infty}\frac{\cos\frac{1}{2n}x + \cos\frac{3}{2n}x + \cdots + \cos\frac{2n-1}{2n}x}{n}.$$

Man erhält also $\frac{1}{x}$, indem man das arithmetische Mittel der Projektionen von $\operatorname{cosec} x$ auf die n ungeraden Teilungsgeraden des Winkels x in $2n$ Teile bildet, oder x, indem man das harmonische Mittel der auf diesen Geraden liegenden Strecken konstruiert, deren Projektionen $\sin x$ ergeben. Der besondere Fall $x = \frac{\pi}{2}$ findet sich etwas allgemeiner bei Cauchy [1]): Projiziert man eine Strecke 1 auf die n Durchmesser eines regulären $2n$-Ecks, so wird das Mittel μ der Projektionen:

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\vartheta + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n} - \vartheta\right)}{n\sin\frac{\pi}{2n}}.$$

Also mit wachsendem n:

$$\frac{\pi}{2} \doteq \frac{\cos\vartheta}{\mu}.$$

Euler leitet eine der Vietaschen analoge Formel [2]) aus einer Quadratur von Descartes [3]) her:

$$\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4} + \frac{1}{8}\operatorname{tg}\frac{x}{8} + \cdots.$$

Man beweist dieselbe direkt, indem man von der Identität ausgeht:

$$\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x} - \operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right),$$

in dem Klammerausdruck rechts dieselbe Formel für $\frac{x}{2}$ anstatt x anwendet usw. und berücksichtigt, daß der Ausdruck:

1) Exercices d'analyse mathématique.
2) Nov. Comm. Petrop. VIII (1760/61), p. 157.
3) Oeuvres ed. Cousin XI, p. 442.

$$\frac{2^n}{x} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2^n}$$

mit wachsendem n, oder was dasselbe ist, daß der Ausdruck:

$$\frac{1}{\xi} - \operatorname{ctg} \xi$$

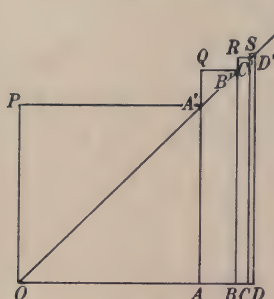
mit gegen 0 abnehmendem ξ wegen

$$\lim_{\xi = 0} \left(\frac{\operatorname{tg} \xi}{\xi}\right) = 1$$

den Grenzwert 0 hat.

Die Descartessche Konstruktion entspricht dem Fall $x = \frac{\pi}{4}$, also der Formel:

$$\frac{4}{\pi} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{\pi}{16} + \frac{1}{8} \operatorname{tg} \frac{\pi}{32} + \cdots.$$



Seine Konstruktion war eine Zirkulatur des Quadrates in folgender Weise: es sei das Rechteck

$$ABB'Q = \frac{1}{4}\,OAA'P,$$

ebenso:

$$BCC'R = \frac{1}{4}\,ABB'Q,$$

$$CDD'S = \frac{1}{4}\,BCC'R$$

$$\cdots\cdots\cdots,$$

dann ist OA der Durchmesser des dem Quadrat eingeschriebenen Kreises, OB der Durchmesser des dem flächengleichen Achteck einbeschriebenen Kreises, OC der Durchmesser des dem flächengleichen Sechzehneck einbeschriebenen Kreises usw.

Die Konstruktionen, die sich aus den Formeln von Nicolaus von Cusa, Snellius, Gregory, Huygens, Newton, Lambert ergeben, haben wir bereits im Anschluß an diese Formeln gebracht. Siehe S. 188—204.

In welcher Weise sie umgekehrt zur Arkufikation einer Strecke zu brauchen sind, ist aus dem Beispiel S. 204 zu ersehen.

Die Gausssche Formel S. 206 würde eine außerordentlich genaue Rektifikation ergeben.

Bei der Konstruktion nach gegebenen Formeln kommen die Forderungen der Geometrographie zu ihrem vollsten Rechte. Schon die bloße Konstruktion einer rationalen Zahl als Streckenverhältnis kann in sehr verschiedener Weise erfolgen; es wird schwer sein, für die Aufsuchung der *einfachsten* allgemeine Regeln zu geben, aber in jedem einzelnen gegebenen Falle ist das natürlich ausführbar.

Achter Teil.

Irrationalität und Transzendenz von e und π.[1])

Einleitung. Ältere Versuche.

Die Frage nach der Quadratur des Kreises kommt, wie aus dem früheren hervorgeht, darauf zurück, ob π eine quadratisch irrationale Zahl ist, bzw., wenn beliebige algebraische Konstruktionsmittel zugelassen werden, ob π eine algebraische Zahl ist. Zwar sind in älterer Zeit die Versuche sehr zahlreich, die Quadratur mit Zirkel und Lineal zu finden, aber doch taucht schon hier und da die Vermutung auf, daß es sich um etwas Unmögliches handeln könnte.[2]) Die ältesten Beweisversuche von Gregory[3]), Lagny[4]), Saurin[5]), Newton[6]), Waring[7]), Ruffini[8]) mußten fehlschlagen; auch Euler[9]) hat Versuche in dieser Richtung unternommen; er weist darauf hin, daß zunächst einmal die Irrationalität von π bewiesen werden müßte, daß aber daraus die Unmöglichkeit der Quadratur noch keineswegs folgen würde.

---

1) Über die Geschichte des Problems vgl. F. Rudio, Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Leipzig 1892.

2) Schon Michael Stifel äußerte sich in diesem Sinne: Arithmetica integra 1544. Er unterscheidet ganz richtig zwischen mathematischen und physischen Kreisen; letztere sind (praktisch) quadrierbar.

3) De vera circuli et hyperbolae quadratura.

4) Mém. Paris 1727, p. 124.

5) Mém. Paris 1720.

6) Principia I, 6. Lemma 28. Vgl. auch D. Melanderhjelm, Isaaci Newtoni tractatus de quadratura curvarum ... Stockholm 1762. Der Beweis wurde von D'Alembert (Opuscula IV, 66) und Ruffini (s. u.) angegriffen.

7) Proprietates algebraicarum curvarum. Er behauptet, kein algebraisches Oval ist quadrierbar. Vgl. Brougham, Phil. Trans. 88 (1798), p. 378; Routh, Analytical View of Sir Isaacs Newtons Principia 1855, p. 73; Zeuthen, Bull. de l'Ac. de Copenhague 1895.

8) Mem. della soc. ital. IX, 1801, p. 527; s. auch T. V. Caluso ib., p. 558.

9) Considerationes cyclometricae. Novi Comm. Acad. Petrop. XVI (1771), p. 169. Der fragliche Satz wird wohl zum ersten Male ausgesprochen von J. Chr. Sturm, Mathesis enucleata (Norimbergae 1689), p. 181, Prop. XLIII. Vgl. auch Huygens, der sagt, daß durch Gregorys angeblichen Beweis noch nicht einmal die Irrationalität von π bewiesen sei.

Gregorys Beweis wurde von Huygens[1]) einer vernichtenden Kritik unterzogen. Er enthält jedoch einen sehr brauchbaren Gedanken[2]): Ein Archimedischer Algorithmus (S. 186) soll nicht gegen eine „algebraische“ Funktion der Ausgangsgrößen A, B konvergieren, weil eine Funktion $f(A, B)$, für welche

$$f(A, B) = f\left(\sqrt{AB}, \frac{2AB}{A+\sqrt{AB}}\right)$$

ist, nicht algebraisch ist; d. h. bei Gregory 'explizit algebraisch', da man den Unterschied natürlich noch nicht kannte. Daß es algebraische, nicht explizit algebraische Größen gibt, z. B. Wurzeln allgemeiner Gleichungen fünften Grades, bewies ja erst Abel.[3]) Gregory transformiert die Funktionalgleichung in diese

$$f(x^3 + x^2y, \ xy^2 + y^3) = f(x^2y + xy^2, \ 2xy^2);$$

seine weiteren Schlüsse sind natürlich hinfällig. Aber aus seinem Ansatz kann man in der Tat die Transzendenz zwar nicht von π, aber immerhin von z. B. $\cos x$ beweisen, die erst Jac. Bernoulli[4]) bewies. Bestünde eine irreduktible algebraische Gleichung

$$F(x, \cos x) = 0,$$

dann wäre auch

$$F(2x, 2\cos^2 x - 1) = 0;$$

also müßten die beiden Gleichungen

$$F(x, y) = 0, \quad F(2x, 2y^2 - 1) = 0$$

dieselbe Funktion y von x definieren. Es muß also mit Rücksicht auf den Grad

$$F(2x, 2y^2 - 1) = F(x, y) \cdot G(y)$$

sein. Setzt man $x = 0$, so muß mit $F(0, y) = 0$ auch

$$F(0, 2y^2 - 1) = 0$$

sein; d. h. die Gleichung $F(0, \cos x) = 0$ hat mit jeder Wurzel $\cos x$ auch $\cos 2x$ zur Wurzel, also auch $\cos 4x$ usw. Und da die Anzahl der Wurzeln endlich ist, so muß schließlich $2^k x = \pm 2^h x + n\pi$ sein, d. h. x ein rationaler Teil von π. Dies ausgeschlossen, ist also sicher $\cos x$ keine algebraische Funktion von x.

1) Opera varia I, p. 405 ff.

2) Vgl. Heinrich, Bibl. math. II (1901), p. 77.

3) Crelles J. 1 (1826), p. 65 = Oeuvres (Christiania 1881) I, p. 66.

4) Paris Mém. 1702, p. 281.

Kapitel I.

Irrationalität von π und π^2 nach Lambert, Gauss, Legendre, Hermite.

Daß π irrational ist, wurde zum ersten Male von Lambert bewiesen, der sogar den allgemeinen Satz ausspricht: zirkuläre und logarithmische Größen rationaler Zahlen sind nicht Wurzeln rationaler Gleichungen [1]), und sagt: sein Beweis ließe sich dahin ausdehnen. Dieser Beweis ist der folgende:

Aus dem Kettenbruch (S. 267) folgt:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{n} = \cfrac{1}{n - \cfrac{1}{3n - \cfrac{1}{5n - \cfrac{1}{7n - \ddots}}}}$$

Der Wert eines solchen Kettenbruchs ist aber irrational; denn die Kettenbruchentwicklung eines rationalen Bruches bricht ab. Demnach ist $\operatorname{tg}\frac{1}{n}$ für jede ganze Zahl n irrational. Dasselbe beweist er [2]) „außerordentlich scharfsinnig und im wesentlichen vollkommen einwandfrei“ [3]) für den Kettenbruch:

$$\operatorname{tg}\frac{m}{n} = \cfrac{m}{n - \cfrac{m^2}{3n - \cfrac{m^2}{5n - \cfrac{m^2}{7n - \ddots}}}},$$

also auch für $\operatorname{tg}\operatorname{hyp}\frac{m}{n}$, also für $e^{\frac{m}{n}}$.

Es sei nämlich

$$\sin\frac{m}{n} = M, \quad \cos\frac{m}{n} = N,$$

und man berechne R', R'', R''' usw. aus den Formeln:

---

1) Briefwechsel hrsg. von Joh. II. Bernoulli; Brief an Holland vom 10. Januar 1768.

2) Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques. Hist. Acad. Berl. 17, 1768 (année 1761! s. o. S. 266), p. 265.

3) Pringsheim (Münch. Akad. Ber., math. phys. Kl. 28, 1898, p. 325) macht zuerst hierauf aufmerksam, während früher (s. z. B. Rudio l. c. und sogar auch jetzt noch Enriques II, p. 315, ferner Fricke in Gauss Werke VIII, p. 29) die Ansicht verbreitet war, daß erst Legendre den fraglichen Satz streng bewiesen hat. Aber bei Legendre fehlt jeder Konvergenz- und Gültigkeitsbeweis.

$$\begin{aligned} mN &= nM - R', \\ m^2 M &= 3nR' - R'', \\ m^2 R' &= 5nR'' - R''', \\ &\vdots \\ m^2 R^{(k-2)} &= (2k-1)nR^{(k-1)} - R^{(k)}, \end{aligned}$$

oder, was dasselbe ist:

$$\begin{aligned} R' &= nM - mN, \\ R'' &= 3nR' - m^2 M, \\ R''' &= 5nR'' - m^2 R', \\ &\vdots \\ R^{(k)} &= (2k-1)nR^{(k-1)} - m^2 R^{(k-2)}. \end{aligned}$$

Andererseits werden die Näherungswerte des Kettenbruches

$$\operatorname{tg} \frac{m}{n} = \cfrac{m}{n - \cfrac{m^2}{3n - \cdot_{\cdot_{\cdot}}}}$$

bezeichnet mit

$$\frac{A'}{B'}, \quad \frac{A''}{B''}, \quad \frac{A'''}{B'''}, \ldots$$

so daß also:

$$\begin{aligned} A^{(k)} &= (2k-1)nA^{(k-1)} - m^2 A^{(k-2)}, \\ B^{(k)} &= (2k-1)nB^{(k-1)} - m^2 B^{(k-2)} \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} A^{(0)} = 0, & B^{(0)} = 1 \\ A^{(1)} = m, & B^{(1)} = n \end{pmatrix}$$

ist.

Da nun

$$R' = MB' - NA'$$

und

$$R^{(0)} = MB^{(0)} - NA^{(0)}$$

ist, und für die drei Reihen

$$R^{(0)}, R^{(1)}, R^{(2)}, \ldots, \quad A^{(0)}, A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, \quad B^{(0)}, B^{(1)}, B^{(2)}, \ldots$$

dieselbe Rekursionsformel gilt, so ist allgemein:

$$R^{(k)} = MB^{(k)} - NA^{(k)},$$

also (s. S. 266[1]) *beliebig klein.* Wäre jetzt $\frac{M}{N} = \frac{\mu}{\nu}$, μ, ν teilerfremde ganze Zahlen, so sei $M = \mu D$, $N = \nu D$[1]); dann folgt aus

$$R^{(k)} = MB^{(k)} - NA^{(k)},$$

---

1) Daß von M und $N = \sqrt{1 - M^2}$ mindestens eine, also auch D *irrational* sein muß, wie Pringsheim l. c., p. 334 behauptet, ist nicht zu schließen, ist auch zum Beweise nicht nötig.

daß auch $\frac{R^{(k)}}{D}$ *ganze* Zahlen sind. Demnach hätte man eine Reihe *ganzer* beliebig klein werdender Zahlen, was unmöglich ist. Ähnlich ist der Beweis von Gauss[1]), der aber von den Größen

$$R_k = \sum_{h=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{\pm m^{h+2k}}{h!\,(h+2)\,(h+4)\cdots(h+2k)\,n^{h+k}}$$

direkt zeigt, daß sie unbegrenzt abnehmen.

Legendre benutzt zu demselben Zwecke den Hilfssatz[2]): „Ein Kettenbruch:

$$\cfrac{m}{n + \cfrac{\varepsilon' m'}{n' + \cfrac{\varepsilon'' m''}{n'' + \cdots}}},$$

wo die ε Vorzeichen bedeuten, alle Teilzähler und -nenner positive ganze Zahlen sind und $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \cdots < 1$ sind, hat einen irrationalen Wert."

Beweis: Angenommen, der Kettenbruch hätte den rationalen Wert $\frac{b}{a}$, so bestimme man die positiven Zahlen $c, d, \ldots$ aus:

$$\frac{c}{b} = \cfrac{m'}{n' + \cfrac{\varepsilon'' m''}{n'' + \cdots}}, \qquad \frac{d}{c} = \cfrac{m''}{n'' + \cfrac{\varepsilon''' m'''}{n''' + \cdots}}, \quad \text{usw.}$$

so folgt:

$$\frac{b}{a} = \frac{m}{n + \varepsilon' \frac{c}{b}},$$

$$\frac{c}{b} = \frac{m'}{n' + \varepsilon'' \frac{d}{c}},$$

$$\cdots\cdots$$

also:

$$\varepsilon' c = ma - nb,$$

$$\varepsilon'' d = m'b - n'c,$$

$$\cdots\cdots$$

so daß auch $c, d, \ldots$ ganze Zahlen sind.

Andererseits folgt, daß jeder der Brüche $\frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \cdots$ ein echter Bruch ist. Denn mit $\frac{m}{n}$ ist auch $\frac{m}{n+\omega}$ ein positiver echter Bruch,

1) Werke VIII, p. 27. Vgl. auch weiter unten den Beweis von Hermite.
2) Éléments de géométrie (12e éd. Paris 1823), p. 296.

wenn ω ein positiver oder negativer echter Bruch ist. Folglich ist auch $\dfrac{m}{n+\dfrac{\varepsilon' m'}{n'}}$ ein positiver echter Bruch[1]), ebenso $\dfrac{m'}{n'+\dfrac{\varepsilon'' m''}{n''}}$, also auch:

$$\cfrac{m}{n+\varepsilon'\cfrac{m'}{n'+\varepsilon''\cfrac{m''}{n''}}} \quad \text{usw.}$$

Also überhaupt:

$$\frac{b}{a} = \cfrac{m}{n+\cfrac{\varepsilon' m'}{n'+\cfrac{\varepsilon'' m''}{n''+\ddots}}},$$

ebenso:

$$\frac{c}{b} = \cfrac{m'}{n'+\cfrac{\varepsilon'' m''}{n''+\ddots}} \quad \text{usw.}$$

Also würden die Zahlen $a, b, c, d, \ldots$ eine Reihe positiver ganzer abnehmender Zahlen sein, was unmöglich ist.[2])

Aus diesem Hilfssatz folgt, daß $\operatorname{tg}\dfrac{m}{n}$ irrational ist; denn die Voraussetzungen sind für den obigen Kettenbruch, wenn nicht von Anfang an, dann doch sicher von einem späteren Gliede ab, erfüllt.

---

1) Dieser Schluß ist bei $\varepsilon' = +1$ schon möglich, wenn nur $\dfrac{m}{n} \leqq 1$, statt $\dfrac{m}{n} < 1$ vorausgesetzt wird. Übrigens ist noch der Fall auszuschließen, daß der Kettenbruch von irgendeinem Gliede an die Form hat:

$$\cfrac{m}{m+1-\cfrac{m'}{m'+1-\cfrac{m''}{m''+1\cdot\ddots}}},$$

da dieser letztere $= 1$ ist.

2) Der Beweis dieses Hilfssatzes beruht auf der völlig unbewiesenen Annahme, daß jeder solche Kettenbruch

$$\cfrac{m}{n+\cfrac{\varepsilon' m'}{n'+\ddots}}$$

ohne weiteres einer bestimmten Zahl gleich gesetzt werden kann. Die erforderlichen Konvergenzbeweise haben unter der Voraussetzung, daß alle $\varepsilon = +1$ oder alle $\varepsilon = -1$ sind, erst Seidel (Untersuchungen über die Konvergenz und Divergenz der Kettenbrüche, Diss. München 1846; Münch. Akad. Abh. 2. Kl. VII, 1855, p. 582) und Stern (Crelles J. 37, 1848, p. 264, 266; Algebr. Analysis, p. 301), für beliebige ε erst A. Pringsheim (Münch. Akad. Ber. Math.-phys. Kl. XXVIII, 1898 (1899), p. 295) geliefert.

Also ist die Tangente jedes rationalen Bogens irrational und demnach auch umgekehrt der Bogen zu jeder rationalen Tangente irrational; also z. B.:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} 1$$

irrational.

Die Anwendung desselben Legendreschen Hilfssatzes auf:

$$\operatorname{tg\,hyp} \frac{m}{n} = \frac{e^{\frac{m}{n}} - e^{-\frac{m}{n}}}{e^{\frac{m}{n}} + e^{-\frac{m}{n}}}$$

ergibt die Irrationalität hiervon, also auch von $e^{\frac{m}{n}}$.

Legendre beweist mit denselben Hilfsmitteln, daß auch π^2 irrational ist. In der Tat, setzt man in dem Kettenbruch für $\operatorname{tg} x$ statt x den Wert π ein, so erhält man die Gleichung:

$$0 = \cfrac{\pi}{1 - \cfrac{\pi^2}{3 - \cfrac{\pi^2}{5 - \cfrac{\pi^2}{7 - \ddots}}}},$$

also:

$$3 = \cfrac{\pi^2}{5 - \cfrac{\pi^2}{7 - \ddots}}$$

Wäre nun π^2 einer rationalen Zahl $\frac{m}{n}$ gleich, so wäre:

$$3 = \cfrac{m}{5n - \cfrac{m}{7 - \cfrac{m}{9n - \ddots}}},$$

was nach dem bewiesenen Hilfssatz unmöglich ist. — Es scheint nicht, daß man in derselben Weise die Irrationalität von $\operatorname{tg} \sqrt{\frac{m}{n}}$ und $\operatorname{tg\,hyp} \sqrt{\frac{m}{n}}$, also von $e^{\sqrt{\frac{m}{n}}}$ zeigen kann.

Dem Beweise Hermites[1]) für die Irrationalität von π und π^2 kann man eine solche Form geben, daß man einerseits die Beziehung zum Lambertschen Beweise, andererseits den Keim zum allgemeinen Transzendenzbeweis von e und π darin deutlich erkennen kann. Hermite sucht in dem Ausdruck $U_n(x) \cos x + V_n(x) \sin x$ die ganzen Funktionen

1) Crelles J. 76 (1873), p. 303, 342.

U, V von der Ordnung $\leqq n$ so zu bestimmen, daß dieser Ausdruck mit einer möglichst hohen Potenz von x beginnt.[1]) Wir wollen statt der Kreisfunktionen die hyperbolischen nehmen:

$$\cos \operatorname{hyp} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \sin \operatorname{hyp} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Setzt man

$$R_{-1} = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad R_0 = \frac{e^z - e^{-z}}{2z},$$

$$R_n = \sum_0^\infty \frac{z^{2k}}{(2k)!} \cdot \frac{1}{(2k+1)(2k+3)\cdots(2k+2n+1)},$$

so ist identisch:

$$\begin{aligned} R_{-1} - R_0 &= z^2 R_1, \\ R_0 \ - 3R_1 &= z^2 R_2, \\ R_1 \ - 5R_2 &= z^2 R_3, \\ &\vdots \\ R_{n-1} - (2n+1) R_n &= z^2 R_{n+1}, \end{aligned}$$

daraus folgt:

$$\begin{aligned} -3R_{-1} + (3+z^2) R_0 &= z^4 R_2, \\ (15+z^2) R_{-1} + (15+6z^2) R_0 &= z^6 R_3, \\ -(105+10z^2) R_{-1} + (105+45z^2+z^4) R_0 &= z^8 R_4 \text{ usw.} \\ &\vdots \end{aligned}$$

allgemein

$$U_n \cos \operatorname{hyp} z + V_n \sin \operatorname{hyp} z = z^{2n+1} R_n,$$

wo U_n, V_n ganze, ganzzahlige Funktionen und wo der Grad von U_n die größte ungerade Zahl $\leqq n$, der von V_n die größte gerade Zahl $\leqq n$ ist. Natürlich konnte man dieselbe Gleichung für cos und sin herleiten, oder man ersetzt in jener z^2 durch $-x^2$ und erhält eine Gleichung von der Form:

$$U_n \cos x + V_n \sin x = x^{2n+1} R_n.$$

Wäre für $x = \frac{b}{a}$ jetzt $\operatorname{tg} x$ rational gleich $\frac{p}{q}$, so erhält man

$$a^{2n+1}(U_n q + V_n p) = \sqrt{p^2 + q^2} \cdot b^{2n+1} R_n;$$

das ist unmöglich, weil links eine ganze Zahl, rechts eine beliebig kleine *positive* Zahl steht. Denn es ist

---

1) Lambert erreichte dasselbe, indem er auf $\sin x$ und $\cos x$ den Euklidischen Kettenbruchalgorithmus anwandte.

$$b^{2n+1} R_n = b^{2n+1} \sum_0^\infty (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \cdot \frac{1}{(2k+1)(2k+3)\cdots(2k+2n+1)}$$

$$= \frac{b^{2n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2!}\cdot\frac{1}{2n+3} + \frac{x^4}{4!}\cdot\frac{1\cdot 3}{(2n+3)(2n+5)} - \cdots\right).$$

Wäre zweitens $\frac{\pi}{2} = \sqrt{\frac{b}{a}}$, so erhält man für $x = \frac{\pi}{2}$ ebenso:

$$(\sqrt{a})^{2n} V_n\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right) = \frac{\sqrt{b}^{2n+1}}{\sqrt{a}} \cdot R_n,$$

wo wieder links eine ganze, rechts eine beliebig kleine positive Zahl steht.

Auch dieser Beweis ist nicht auf die Irrationalität von $\operatorname{tg}\sqrt{\frac{b}{a}}$ oder $\operatorname{tg} \operatorname{hyp} \sqrt{\frac{b}{a}}$ auszudehnen.

Kapitel II.

Irrationalität von e und e^2. Sätze von Fourier, Liouville, Hurwitz.

Neben dem Problem der Transzendenz von π steht dasjenige von der Transzendenz von e, das mit jenem eng verbunden ist und eine ähnliche geometrische Bedeutung hat. Die Transzendenz von $e^{\frac{m}{n}}$ bedeutet (s. S. 243) z. B., daß kein Hyperbelsektor mit rationalem Inhalt konstruierbar ist.

Die bloße Irrationalität von e ist von Fourier[1]) aus der Reihe:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

bewiesen worden.

Wäre e rational, so multipliziere man die Gleichung mit $n!$, wo n hinreichend groß. In der Gleichung

$$n!\left(e - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{n!}\right) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots$$

steht links eine ganze Zahl, rechts eine Summe, die positiv, aber kleiner als

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots = \frac{1}{n}$$

1) Stainville, Mélanges d'analyse 1815, p. 339.

ist, was unmöglich.[1]) Ähnlich läßt sich beweisen, daß auch

$$e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \cdots$$

irrational ist. Man muß dabei davon Gebrauch machen, daß $n!$ genau durch die $(n - q_n)^{\text{te}}$ Potenz von 2 teilbar ist, wenn mit q_n die Quersumme von n im dyadischen Zahlsystem bezeichnet wird. Die Richtigkeit dieses Hilfssatzes ergibt sich durch den Schluß von $2n$ auf $2n+1$, und den Schluß von n auf $2n$. Denn erstens ist $q_{2n+1} = 1 + q_{2n}$ und $(2n)!$ und $(2n+1)!$ sind durch gleich hohe Potenzen von 2 teilbar; ist also $(2n)!$ durch $2^{2n-q_{2n}}$ teilbar, dann $(2n+1)!$ durch $2^{(2n+1)-q_{2n+1}}$. Zweitens ist

$$(2n)! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots 2n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1) = 2^n\cdot n!\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)$$

teilbar durch

$$2^{n+(n-q_n)} = 2^{2n-q_{2n}},$$

weil $q_{2n} = q_n$.

Setzt man jetzt $n! = n;\cdot 2^{n-q_n}$, so daß $n;$ eine ungerade Zahl ist, so folgt aus

$$e^2 = \sum \frac{2^{q_n}}{n;}$$

durch Multiplikation mit $2^\nu(n-1);$ für eine hinreichend große Zahl $n = 2^m$, so daß $2^\nu(n-1);e^2$ eine ganze Zahl wird:

$$2^\nu(n-1);\left(e^2 - 1 - \cdots - \frac{2^{q_{n-1}}}{(n-1);}\right) = \frac{2^{\nu+q_n}}{n}\left(1 + \frac{2}{n+1} + \frac{2^2}{(n+1)(n+2)} + \cdots\right);$$

aber die Klammersumme rechts wird kleiner als

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{n+1}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{2}{n+1}} = \frac{n+1}{n-1},$$

und der Faktor, mit dem sie multipliziert ist, wird, wegen $q_n = 1$, ν konstant, n beliebig groß, eine beliebig kleine positive Zahl. Eine solche Gleichung ist wieder unmöglich.

---

1) Ebenso ist jede solche Summe

$$\frac{c_1}{l_1} \pm \frac{c_2}{l_1 l_2} \pm \frac{c_3}{l_1 l_2 l_3} + \cdots$$

irrational, wenn $l_1, l_2, l_3, \ldots$ wachsende ganze Zahlen sind und die $c_1, c_2, \ldots$ endlich bleibende ganze Zahlen sind; also sind z. B. auch

$$a\left(\frac{1}{1!} \pm \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} \pm \frac{1}{7!} + \cdots\right) + b\left(\frac{1}{0!} \pm \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} \pm \frac{1}{6!} + \cdots\right)$$

irrational für alle ganzen Zahlen a und b, d. h.: e und $\operatorname{tg}\frac{1}{2}$ nicht Wurzel einer quadratischen Gleichung. Über Sätze dieser Art s. Stern, Crelles J. 37 (1848), p. 95.

Eine Ausdehnung dieser Beweise auf andere Potenzen von e ist nicht bekannt. Aber Liouville[1]) zeigt mit denselben einfachen Grundgedanken, daß weder e noch e^2 einer *quadratischen* Gleichung mit rationalen Koeffizienten genügen. In der Tat, bestünde eine solche Gleichung

$$ae + be^{-1} = c \qquad (a > 0)$$

mit ganzen Zahlen a, b, c, so ergibt die Multiplikation mit $(n-1)!$, daß

$$\frac{a}{n}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots\right) + (-1)^{n-1}\frac{b}{n}\left(1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots\right)$$

eine ganze Zahl werden müßte. Aber links steht bei passender Wahl der Parität von n die Summe zweier positiver beliebig kleiner Brüche, die also stets von Null verschieden ist.

Bestünde zweitens eine Gleichung:

$$ae^2 + be^{-2} = c, \qquad (a > 0)$$

so ergäbe die Multiplikation mit $(n-1)$; für eine hinreichend große Zahl n, daß

$$a\,\frac{2^{q_n}}{n}\left(1 + \frac{2}{n+1} + \cdots\right) + (-1)^{n-1} b\,\frac{2^{q_n}}{n}\left(1 - \frac{2}{n+1} + \cdots\right)$$

eine ganze Zahl sein müßte. Aber, da man $q_n = 2$, nämlich $n = 2^m + 1$ oder $= 2^m + 2$ nehmen kann, ist das bei großem n wieder die Summe zweier beliebig kleiner positiver Brüche usw. Ebenso ergibt sich, daß weder $\operatorname{tg}\frac{1}{2}$ noch $\operatorname{tg} 1$ einer linearen oder einer quadratischen Gleichung genügen können.

Aus der Kettenbruchentwicklung:

$$\frac{e-1}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cdots}}}} \qquad \text{oder} \qquad \frac{e+1}{e-1} = 2 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cdots}}}$$

mußte bereits Euler die Irrationalität von e erkannt haben, wenn er sie auch nicht ausdrücklich aussprach.[2]) Ebenso aus der Entwicklung:

$$\frac{e^2-1}{e^2+1} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cdots}}}$$

---

1) Liouv. J. V (1840), p. 192, 193.

2) Introductio 1753 und Comm. Acad. Petr. IX 1737, (1744), p. 108.

diejenige von e^2. Da ferner Euler wußte, was allerdings erst von Lagrange völlig streng bewiesen wurde, daß die Wurzeln quadratischer Gleichungen in einen *periodischen* Kettenbruch entwickelbar sind, so mußte ihm auch bekannt sein, daß weder e noch e^2 Wurzeln einer *quadratischen* Gleichung sein können. Wollte man dasselbe für e^3 schließen, so müßte man z. B. $\frac{e^3-1}{e^3+1}$ in einen Kettenbruch von erkennbarem Bildungsgesetz entwickeln. Forestar[1]) fand die Teilnenner:

$$1, 8, 1, 16, 2, 1, 1, 2, 4, 1, 2, 11, 2, 1, 2, 36, 1,$$
$$8, 4, 17, 9, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 90 \ldots,$$

welche ein Gesetz nicht erkennen lassen.

Aber Hurwitz[2]) hat gezeigt, daß man hier noch einen Schritt weiter gehen kann. Zwischen zwei unendlichen Kettenbrüchen mit ganzzahligen Nennern, deren einer von irgendeiner Stelle an ist:

$$\cfrac{1}{ka + \cfrac{1}{hb + \cfrac{1}{kc + \cfrac{1}{hd + \ddots}}}}$$

der andere:

$$\cfrac{1}{ha + \cfrac{1}{kb + \cfrac{1}{hc + \cfrac{1}{kd + \ddots}}}} = \cfrac{\frac{k}{h}}{ka + \cfrac{1}{hb + \cfrac{1}{kc + \ddots}}}$$

besteht offenbar eine bilineare Relation; das gilt in folgender Weise umgekehrt: Wenn zwischen zwei unendlichen Kettenbrüchen, deren Teilnenner *wachsende ganze* Zahlen sind, eine bilineare Relation mit ganzzahligen Koeffizienten besteht, dann enden sie in der obigen Weise, wo h und k ganze Zahlen sind. Dies angewandt auf die obigen Kettenbrüche für $\frac{e-1}{e+1}$ und $\frac{e^2-1}{e^2+1}$ ergibt, daß e keiner Gleichung dritten Grades genügt, denn eine solche läßt sich immer als bilineare Gleichung zwischen e und e^2, also auch zwischen $\frac{e-1}{e+1}$ und $\frac{e^2-1}{e^2+1}$ schreiben. Allgemeiner kann man ebenso folgern, daß zwischen $e^{\frac{2}{m}}$ und $e^{\frac{2}{n}}$ keine bilineare Gleichung bestehen kann; ebenso nicht zwischen $\operatorname{tg}\frac{1}{m}$ und $\operatorname{tg}\frac{1}{n}$.

---

1) Hermite, Crelles J. 76 (1873), p. 342. 2) Hurwitz, Zürich. Naturf. Ges. Vierteljahrsschr. 41 (1896) II, p. 34; phys.-ökon. Ges. Königsberg 1890.

Kapitel III.

Existenz transzendenter Zahlen nach Liouville und Cantor.

Die Frage nach der Transzendenz von e und π hatte eigentlich erst von dem Augenblick an einen rechten Sinn, nachdem die Existenz transzendenter Zahlen durch Liouville bewiesen war. Das Liouvillesche Transzendenzkriterium [1]) für eine Zahl x_0 beruht auf der Kettenbruchentwicklung der Zahl x_0 bzw. auf den daraus folgenden Näherungswerten $\frac{p}{q}$. Ist nämlich:

$$x_0 = \mu_0 + \cfrac{1}{\mu_1 + \cfrac{1}{\mu_2 + \cdots}}$$

die Kettenbruchentwicklung, sind

$$\frac{p_0}{q_0} = \mu_0, \quad \frac{p_1}{q_1} = \mu_0 + \frac{1}{\mu_1}, \quad \cdots,$$

die Näherungswerte, ferner

$$r_k = \cfrac{1}{\mu_k + \cfrac{1}{\mu_{k+1} + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

die Reste für eine reelle algebraische Zahl x_0, deren konjugierte x_1, $x_2, \ldots, x_{n-1}$ heißen mögen, und

$$f(x) = a(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) = ax^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

mit ganzzahligen $a, a_1, a_2, \ldots, a_n$, so wird $\left|q_k^n f\left(\frac{p_k}{q_k}\right)\right|$ eine *ganze* Zahl, also $\geqq 1$, und für hinreichend große k, da $\frac{p_k}{q_k} \doteq x_0$ wird:

$$a\left(\frac{p_k}{q_k} - x_1\right)\left(\frac{p_k}{q_k} - x_2\right)\cdots\left(\frac{p_k}{q_k} - x_{n-1}\right)$$

beliebig nahe gleich

$$a(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\cdots(x_0 - x_{n-1}) = f'(x_0).$$

Also wird:

$$\left|\frac{p_k}{q_k} - x_0\right| > \frac{1}{|f'(x_0)| \cdot q_k^n}.$$

Damit ist bereits die Art der Annäherung charakterisiert, die bei

1) Liouv. J. (1) 16 (1851), p. 134, 139.

algebraischen Zahlen statthat. Man kann diesem Gesetz andere Formen geben. Es ist

$$x_0 = \frac{p_{k-1} r_k + p_k}{q_{k-1} r_k + q_k},$$

also:

$$\left| \frac{p_k}{q_k} - x_0 \right| = \frac{r_k}{q_k(q_{k-1} r_k + q_{k-2})},$$

da $|p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1}| = 1$ ist; demnach wird:

$$\frac{q_k(q_{k-1} r_k + q_{k-2})}{r_k} < |f'(x_0)| q_k^n,$$

also um so mehr $\frac{1}{r_k} < |f'(x_0)| q_k^{n-2}$, und $\left[\frac{1}{r_k}\right]$ d. h. $\mu_k < |f'(x_0)| q_k^{n-2}$. Bildet man also einen Kettenbruch, so daß stets $\mu_k > A \cdot q_k^{n-2}$, so wird durch ihn keine algebraische Zahl n^{ter} Ordnung dargestellt, also keine algebraische Zahl, wenn man hier n mit k unbegrenzt wachsen läßt. Z. B. ist für den Kettenbruch

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cdots}}}$$

jedenfalls von irgendeinem Gliede ab immer $\mu_k > A$, für irgendeine gegebene Zahl A; also ist die obige Bedingung, in der $n = 2$ gesetzt wird, erfüllt, d. h. der Kettenbruch

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cdots}}$$

ist nicht algebraisch von der zweiten Ordnung. Aber schon bei einem viel schwächeren Wachsen[1]) der Teilnenner μ, als es dem Liouvilleschen Transzendenzkriterium $\mu_k > A \cdot q_k^{n-2}$ entspricht, kann ein Kettenbruch einen transzendenten Wert haben. Darum versagt seine Anwendung z. B. bei den Entwicklungen von

$$\frac{e^{\frac{1}{n}} - e^{-\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}} + e^{-\frac{1}{n}}} = \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{3n + \cfrac{1}{5n + \cdots}}}$$

Auf anderen Betrachtungen beruht der *Cantor*sche Beweis der Existenz transzendenter Zahlen.[2]) Er gründet sich auf die Unter-

1) Aus dem Cantorschen Existenzbeweis transzendenter Zahlen (s. u.) folgt sogar, daß es unendlich viele transzendente Kettenbrüche gibt, in denen $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ unter irgendeiner vorgeschriebenen Grenze > 1 bleiben.

2) Crelles J. 77 (1874), p. 258.

scheidung zwischen abzählbaren und nicht abzählbaren Mengen: „Eine Menge heißt abzählbar, wenn ihre Elemente der Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, ... eindeutig zugeordnet werden können."

Dann läßt sich sofort nachweisen, daß die Menge aller algebraischen Zahlen abzählbar ist. Denn bezeichnet man die Summe des Grades und der absoluten Beträge der Koeffizienten einer ganzzahligen algebraischen Gleichung als die *„Höhe"* dieser Gleichung und ihrer Wurzeln, so gehören zu jeder Höhe offenbar nur eine endliche Zahl von algebraischen Gleichungen, also auch nur eine endliche Zahl von reellen algebraischen Zahlen. Ordnet man alle reellen algebraischen Zahlen nach ihrer Höhe und die von gleicher Höhe nach ihrer Größe, so hat man damit eine Anordnung aller reellen algebraischen Zahlen in eine Reihe, woraus ihre Abzählbarkeit folgt. Nunmehr ist es leicht, Zahlen anzugeben, die von allen algebraischen Zahlen verschieden sind, die also transzendent sein müssen. Denkt man sich nämlich die sämtlichen reellen algebraischen Zahlen der Reihe nach in Kettenbrüche entwickelt und bildet eine Zahl, die in dem ersten Teilnenner μ_0 von der ersten algebraischen Zahl, in dem zweiten μ_1 von der zweiten usw. differiert, so ist dies eine Zahl, die von allen algebraischen Zahlen verschieden, also transzendent ist.

Ebenso leicht beweist man übrigens den allgemeineren Satz: Es gibt keine endliche oder abzählbare Anzahl von transzendenten Zahlen, so daß alle übrigen transzendenten Zahlen von diesen algebraisch abhängen.[1])

Kapitel IV.

Das allgemeine Beweisprinzip und die zwei einfachsten Fälle.

Der Hermitesche Beweis[2]) der Unmöglichkeit einer Gleichung von der Form:

$$a e^m + b e^n + c e^p + \cdots = 0$$

mit *ganzen* Zahlen *a, b, c, ..., m, n, p, ...* ist von *Lindemann*[3]) auf den allgemeineren Fall ausgedehnt worden, daß diese Zahlen *algebraische* Zahlen sind. Dieser Lindemannsche Satz umfaßt natürlich mit Rücksicht auf die Gleichung:

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

zugleich die Transzendenz von π und mit Rücksicht auf die Gleichung

1) Vahlen, Gött. gel. Anz. 1901, p. 796.

2) Comptes rendus 77 (Paris 1873), p. 18, 74, 226, 285. Sur la fonction exponentielle. Paris 1874.

3) Berl. Akad. Ber. 1882 II, p. 679.

$e^{xi} + e^{-xi} = 2\cos x$ die Transzendenz von x bei jedem algebraischen $\cos x$, oder die Transzendenz von $\cos x$ bei jedem algebraischen x, also die Unmöglichkeit der Quadratur konstruierbarer Kreis- oder Hyperbelsektoren. Dieser Beweis beruht auf Integrationen über komplexen Wegen; er ist später von Weierstraß[1]), Stieltjes[2]) Hilbert[3]), Hurwitz[4]), Gordan[5]), Mertens[6]) und dem Verfasser[7]) nach und nach derartig vereinfacht worden, daß dieser letzte Beweis nur noch die elementarsten Hilfsmittel beansprucht.[8])

Alle diese Beweise, von denen wir weiter unten den letzten und einfachsten entwickeln werden, beruhen auf der Approximation der Funktion e^x durch rationale Funktionen von x. Der einfachste Fall der Hermite-Lindemannschen Gleichung: $ae^\alpha = c$ für ganze Zahlen a, c, α und der nächst einfache Fall $a(e^\alpha + e^{\alpha'}) = c$ für ganze Zahlen a, c, $\alpha + \alpha'$, $\alpha\alpha'$ sollen vorweg behandelt werden. Dadurch wird das nahe Verhältnis zu den Lambert-Hermiteschen Beweisen für π und π^2 besonders deutlich, und man erkennt, daß der allgemeine Beweis im wesentlichen nur eine Weiterbildung dieser speziellen Beweise ist. Auch erkennt man, daß es für die Einfachheit gleichgültig ist, ob die Exponenten ganze rationale oder algebraische Zahlen sind; die Einfachheit hängt vielmehr nur von der Anzahl der Glieder der Gleichung ab. Demnach konnte der zu entwickelnde Beweis sofort aus dem Hermiteschen für die Transzendenz von e entnommen werden, wenn man nur diesen Beweis von allen unnötigen, den Kern der Sache verhüllenden Komplikationen befreit hätte. Dieser Kern ist für den einfachsten Fall einer zweigliedrigen Gleichung $ae^\alpha = c$ dieser: Man stelle e^α näherungsweise durch eine rationale Funktion $\frac{G(\alpha)}{F(\alpha)}$ dar, so daß die Entwicklung $e^\alpha F(\alpha) - G(\alpha) = R(\alpha)$ mit einer möglichst hohen Potenz von α beginnt. Dann ist nur noch zu zeigen, daß der Rest $R(\alpha)$ beliebig klein gemacht werden kann, während $cF(\alpha) - aG(\alpha)$ eine nicht verschwindende Zahl ist.

Für den Fall einer mehrgliedrigen Hermite-Lindemannschen Gleichung:

$$ae^x + be^y + \cdots = c$$

hat man ebenso die Funktionen e^x, e^y, ... *simultan* durch rationale Brüche:

---

1) Berl Akad. Ber. 1885, p. 1067. 2) C. R. 110 (Paris 1890), p. 267.
3) Math. Ann. 43 (1893), p. 216 = Gött. Nachr. 1893, p. 113.
4) Math. Ann. 43 (1893), p. 220 = Gött. Nachr. 1893, p. 153.
5) Math. Ann. 43 (1893), p. 222.
6) Wien. Ber. math.-nat. Kl. CV. IIa (1896), p. 839.
7) Math. Ann. 53 (1900), p. 457.
8) Über die Ideenentwicklung in diesen Beweisen s. namentlich Spaczinskis Bote für Experimentalphysik und elementare Mathematik 1900 Nr. 286, 287, 290, 291 (Odessa 1900).

$$\frac{F_1(x, y \ldots)}{F(x, y \ldots)}, \quad \frac{F_2(x, y \ldots)}{F(x, y \ldots)}, \quad \ldots$$

mit demselben Nenner zu approximieren und zu zeigen, daß die gegebene Gleichung durch Multiplikation mit $F(x, y, \ldots)$ eine Gleichheit zwischen einer nicht verschwindenden ganzen Zahl und einem beliebig kleinen Rest ergibt, was unmöglich ist.

Dies ist der Grundgedanke der erwähnten Beweise, der aber erst in dem Beweise des Verfassers einfach und deutlich sichtbar wird.

Wir wenden uns nunmehr zu den erwähnten beiden einfachsten Fällen.

Zum Beweise der Irrationalität von $e^{\frac{m}{n}}$ braucht man natürlich nur diejenige von e^α für positive *ganze* Exponenten α zu beweisen. Multiplizieren wir

$$e^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \cdots = \sum_0^\infty \frac{\alpha^k}{k!}$$

mit

$$F(\alpha) = \sum_{h=0}^{p} (-1)^h \binom{p}{h} \cdot \frac{(2p-h-1)!}{(p-1)!} \alpha^h,$$

so erhalten wir:

$$\sum_{\substack{k=0 \cdots \infty \\ h=0 \cdots p}} (-1)^h \binom{p}{h} \frac{(2p-h-1)!}{(p-1)!} \frac{\alpha^{k+h}}{k!}.$$

Der Koeffizient von α^l wird für $l < p$:

$$\binom{p}{0}\frac{(2p-1)!}{(p-1)!\,l!} - \binom{p}{1}\frac{(2p-2)!}{(p-1!)(l-1)!} + \binom{p}{2}\frac{(2p-3)!}{(p-1)!\,(l-2)!} - \cdots$$

$$= \frac{(2p-l-1)!}{(p-1)!}\left(\binom{2p-1}{l} - \binom{p}{1}\binom{2p-2}{l-1} + \cdots\right)$$

$$= \frac{(2p-l-1)!}{(p-1)!} \cdot \binom{p-1}{l} = \frac{(2p-l-1)!}{(p-l-1)!\,l!} \quad \text{(nach Relation I, S. 228)};$$

der Koeffizient von α^l für $p \leqq l < 2p$ wird nach Relation II, S. 229 gleich Null; der Koeffizient von α^l für $l \geqq 2p$ wird nach Relation III, S. 229 gleich:

$$\binom{p}{0}\frac{(2p-1)!}{(p-1)!\,l!} - \binom{p}{1}\frac{(2p-2)!}{(p-1)!\,(l-1)!} + \binom{p}{2}\frac{(2p-3)!}{(p-1)!\,(l-2)!} - \cdots$$

$$= \frac{1}{(p-1)!}\left\{\frac{\binom{p}{0}}{l(l-1)\cdots(2p)} - \frac{\binom{p}{1}}{(l-1)(l-2)\cdots(2p-1)} + \frac{\binom{p}{2}}{(l-2)(l-3)\cdots(2p-2)} - \cdots\right\}$$

$$= (-1)^p \frac{(l-2p+1)\cdots(l-p)}{l!}.$$

Setzt man also:

$$G(\alpha) = \sum_{l=0,1,\cdots,p-1} \frac{(2p-l-1)!}{(p-l-1)!\,l!}\,\alpha^l$$

$$R(\alpha) = (-1)^p \sum_{l=2p,2p+1,\cdots,\infty} \frac{(l-2p+1)(l-2p+2)\cdots(l-p)}{l!}\,\alpha^l,$$

so ist identisch:

$$e^\alpha F(\alpha) - G(\alpha) = R(\alpha); \qquad \text{(I)}$$

die $2p$ Koeffizientenverhältnisse der ganzen Funktionen F (von der Ordnung p), G (von der Ordnung $p-1$) sind also so bestimmt, daß die ersten $2p$ Glieder in der Entwicklung von $e^\alpha F - G$ verschwindende Koeffizienten bekommen. Der Quotient $\frac{G}{F}$ ist eine oskulierende Approximation von e^α. Auf der Gleichung (I) beruht nun der Beweis. Bestünde nämlich eine Gleichung $ae^\alpha = c$, wo a, c, α *ganz* sind, so erhielte man durch Multiplikation mit F, worin jetzt p eine beliebig große Primzahl ist, und Einsetzen von $F \cdot e^\alpha = G + R$ die Gleichung: $cF - aG = aR$. Links steht eine ganze, und zwar nicht verschwindende ganze Zahl, denn in $G(\alpha)$ sind alle und in $F(\alpha)$ alle bis auf den letzten Koeffizienten durch p teilbar, nur der letzte wird $(-1)^p$; also wird $F(\alpha)$, von Vielfachen von p abgesehen, gleich $-\alpha^p$, also nach dem Fermatschen Satz gleich $-\alpha$ (s. für $\alpha = 2$ auf S. 108; ebenso allgemein). Rechts steht aber eine beliebig kleine Zahl, denn es wird für $l = 2p + \sigma$:

$$|R(\alpha)| = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{(\sigma+p)(\sigma+p-1)(\sigma+p-2)\cdots(\sigma+2)(\sigma+1)}{(\sigma+2p)(\sigma+2p-1)(\sigma+2p-2)\cdots(\sigma+p+2)(\sigma+p+1)} \cdot \frac{\alpha^{\sigma+2p}}{(\sigma+p)!}$$

$$< \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{\alpha^{\sigma+2p}}{\sigma!\,p!}, \text{ d. h. } < \frac{\alpha^{2p}}{p!} \cdot e^\alpha,$$

also mit wachsendem p beliebig klein.

Als zweites Beispiel wollen wir die Unmöglichkeit einer dreigliedrigen Gleichung $a(e^\alpha + e^{\alpha'}) = c$ mit *ganzen* Zahlen a, c, $\alpha + \alpha'$, $\alpha\alpha'$ beweisen, d. h. also α, α' sind Wurzeln einer quadratischen Gleichung $\alpha^2 + A\alpha + B = 0$ mit *ganzen* Koeffizienten A, B und $B \neq 0$. Wir multiplizieren die vorgelegte Gleichung mit

$$F(\alpha, \alpha') = \sum_{h,i=0,1,2,\cdots,p} (-1)^{h+i} \binom{p}{h}\binom{p}{i} \frac{(3p-h-i-1)!}{(p-1)!}\,\alpha^h \alpha'^i,$$

worin p eine beliebig große Primzahl ist.

Die Glieder von der Ordnung $< 2p$ des Produktes $e^\alpha F(\alpha, \alpha')$ werden:

$$\sum_{h+k+i<2p} (-1)^{h+i} \binom{p}{h}\binom{p}{i} \frac{(3p-h-i-1)!}{(p-1)!\,k!}\,\alpha^{h+k}\alpha'^i;$$

der Koeffizient von $(-1)^i \binom{p}{i} \alpha^l \alpha'^i$ wird:

$$\sum_{h+k=l} (-1)^h \binom{p}{h} \frac{(3p-h-i-1)!}{k!},$$

also, genau wie oben, nur daß statt $2p-h-1$ steht $3p-h-i-1$; demnach erhalten wir für diese Glieder:

$$G(\alpha;\alpha') = \sum_{\substack{i=0,1,\cdots,p\\ l+i<2p}} (-1)^i \binom{p}{i} \binom{2p-i-1}{l} \frac{(3p-l-i-1)!}{(p-1)!} \alpha^l \alpha'^i.$$

Die Glieder von der Ordnung größer oder gleich $2p$, kleiner als $3p$ erhalten in derselben Weise verschwindende Koeffizienten, die übrigen Glieder werden wieder:

$$R(\alpha;\alpha') = (-1)^p \sum_{\substack{i=0,\cdots,p\\ l+i\geqq 3p}} (-1)^i \frac{(l+i-3p+1)(l+i-3p+2)\cdots(l+i-2p)}{l(l-1)\cdots(2p-i)\cdot(p-1)!} \alpha^l \alpha'^i.$$

Die entsprechenden Entwicklungen gelten für das Produkt $e^{\alpha'}\cdot F(\alpha,\alpha')$. Wir haben also die beiden Approximationen:

$$e^{\alpha} F(\alpha,\alpha') = G(\alpha;\alpha') + R(\alpha;\alpha'),\quad e^{\alpha'} F(\alpha,\alpha') = G(\alpha';\alpha) + R(\alpha';\alpha).$$

Infolgedessen wird die gegebene Gleichung:

$$cF(\alpha,\alpha') - a(G(\alpha;\alpha') + G(\alpha';\alpha)) = a\{R(\alpha;\alpha') + R(\alpha';\alpha)\}.$$

Hier steht wieder *links* eine ganze, und zwar nicht verschwindende ganze Zahl, denn $F(\alpha,\alpha')$ und $G(\alpha;\alpha') + G(\alpha';\alpha)$ sind ganze *symmetrische* Funktionen von α und α', also ganze rationale Funktionen von A, B, also ganzzahlig; überdies sind alle Koeffizienten durch p teilbar, außer dem letzten von F; das letzte Glied von F wird $(\alpha\alpha')^p$, also abgesehen von Vielfachen von p, gleich B. *Rechts* steht eine beliebig kleine Zahl, denn es wird:

$$|R(\alpha;\alpha') + R(\alpha';\alpha)| < |R(\alpha;\alpha')| + |R(\alpha';\alpha)|$$

$$< 2\sum \binom{p}{i} \frac{(\sigma+1)(\sigma+2)\cdots(\sigma+p)}{(3p+\sigma-i)(3p+\sigma-i-1)\cdots(2p-i)(p-1)!} \mu^{3p+\sigma},$$

wenn mit μ der größere der beiden absoluten Werte $|\alpha|$, $|\alpha'|$, ferner mit σ die Summe $l+i-3p$ bezeichnet wird; ersetzt man noch $\binom{p}{i}$ durch $\sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} = 2^p$, und überall i durch p und

$$\frac{(\sigma+p)(\sigma+p-1)\cdots(\sigma+1)}{(\sigma+2p)(\sigma+2p-1)\cdots(\sigma+p+1)}$$

durch 1, so erhält man

$$2 \cdot 2^p \mu^{3p} \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{\mu^\sigma}{(\sigma+p)!} < 2^{p+1} \mu^{3p} \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{\mu^\sigma}{\sigma!\, p!},$$

und das ist gleich

$$2 \cdot \frac{(2\mu^3)^p}{p!} \cdot e^\mu$$

also mit wachsendem p beliebig klein.

Ist speziell $\alpha = \sqrt{D}$, $\alpha' = -\sqrt{D}$, so ist demnach jede solche Gleichung:

$$a\left(e^{\sqrt{D}} + e^{-\sqrt{D}}\right) = c$$

für ganze Zahlen a, c, D unmöglich; andererseits bestehen aber die Gleichungen:

$$2 \cos n\pi = e^{n\pi i} + e^{-n\pi i} = \pm 2,$$

also ist niemals $(n\pi)^2$ eine ganze Zahl, d. h. π^2 ist irrational.

Dieser Beweis gestattet die Verallgemeinerung: Es ist stets

$$\cos \sqrt{\frac{m}{n}} \text{ und } \cos\text{hyp} \sqrt{\frac{m}{n}}$$

irrational, da sonst auch (s. S. 248 (5))

$$\cos n\sqrt{\frac{m}{n}} = \cos \sqrt{mn} \text{ bzw. } \cos\text{hyp}\, n\sqrt{\frac{m}{n}} = \cos\text{hyp} \sqrt{mn}$$

rational wäre. Infolgedessen ist auch

$$\operatorname{tg} \sqrt{\frac{m}{n}} \text{ und } \operatorname{tg}\text{hyp} \sqrt{\frac{m}{n}}$$

irrational, da sonst

$$\cos 2\sqrt{\frac{m}{n}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \sqrt{\frac{m}{n}}}{1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{\frac{m}{n}}} \quad \text{und} \quad \cos\text{hyp}\, 2\sqrt{\frac{m}{n}} = \frac{1 + \operatorname{tg}\text{hyp}^2 \sqrt{\frac{m}{n}}}{1 - \operatorname{tg}\text{hyp}^2 \sqrt{\frac{m}{n}}}$$

rational wären.

Kapitel V.

Der allgemeine Transzendenzbeweis.

Nunmehr wollen wir den entsprechenden allgemeinen Beweis für die Transzendenz von e und π entwickeln.[1])

Eine Lindemannsche Gleichung:

$$ae^\alpha + be^\beta + \cdots c = 0$$

mit *algebraischen* Zahlen a, b, ..., c, α, β, ... kann bekanntlich durch Bildung der Norm über alle konjugierten Werte a, b, ..., c,

---

1) Vahlen, Math. Ann. 53 (1900), p. 457.

auf eine Gleichung derselben Form mit *rationalen* Koeffizienten $a, b, \ldots c$ zurückgeführt werden und auch nach Multiplikation mit dem Generalnenner auf eine Gleichung mit *ganzzahligen* Koeffizienten $a, b, \ldots, c$.

Sind ferner die Exponenten $\alpha, \beta, \ldots$ *gebrochene* algebraische Zahlen, also von der Form:

$$\frac{\alpha'}{k}, \quad \frac{\beta'}{k}, \ldots,$$

wo $\alpha', \beta', \ldots$ *ganze* algebraische Zahlen sind und der Generalnenner k eine *ganze rationale* Zahl ist, so kann man durch Bildung der Norm des Ausdrucks:

$$a\sqrt[k]{e^{\alpha'}} + b\sqrt[k]{e^{\beta'}} + \cdots + c = 0$$

über alle konjugierten Werte der k^{ten} Wurzeln eine Gleichung von der ursprünglichen Form bilden, in der die Exponenten *ganze* algebraische Zahlen sind; schließlich bilde man in dieser Gleichung noch die Norm aus allen konjugierten Ausdrücken, die man erhält, indem man für $\alpha, \beta, \ldots$ ihre konjugierten Werte einsetzt.

In der entstehenden Gleichung treten dann zu jedem Exponenten von e auch alle konjugierten Exponenten auf, und zwar haben die betreffenden Glieder gleiche Zahlenkoeffizienten. Folglich kann man schließlich annehmen, daß die Gleichung, deren Unmöglichkeit zu beweisen ist, die folgende Form hat:

$$\sum e^{\alpha} - \sum e^{\beta} = c, \qquad \text{(I)}$$

wo die erste Summe sich auf alle Wurzeln $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ einer Gleichung $f(x) = x^n + \cdots = 0$ mit ganzzahligen Koeffizienten, deren letzter $f(0)$ nicht Null ist, die zweite Summe sich auf alle Wurzeln $\beta, \beta', \beta'', \ldots$ einer Gleichung $g(x) = x^m + \cdots = 0$ mit ganzzahligen Koeffizienten, deren letzter $g(0)$ nicht Null ist, bezieht und c eine ganze rationale Zahl ist.

Die vorhergehende Reduktion ist natürlich nicht nötig, wenn man nur die Transzendenz von e und π beweisen will. Denn eine algebraische Gleichung für e hat bereits die reduzierte Form I, und wenn $2\pi i$ eine algebraische Zahl $\frac{\alpha}{k}$ wäre, so bestände die Gleichung:

$$e^{\alpha} - 1 = 0,$$

woraus durch Normbildung über die konjugierten Werte von α eine Gleichung von der reduzierten Form I hervorgeht.

An diese reduzierte Form knüpfen also die Beweise erst eigentlich an. Dabei ist es wesentlich, daß die Konstante c von 0 verschieden ist. Um das zu erreichen, falls es nicht der Fall ist, muß man die gegebene Gleichung mit $\sum e^{-\alpha}$ multiplizieren, wodurch sie

in eine Gleichung derselben Art, aber mit einer nicht verschwindenden Konstanten c übergeht.

Zum Beweise der Unmöglichkeit der Gleichung I müssen wir, wie oben schon bemerkt, die Größen e^{α}, $e^{\alpha'}$, ... simultan durch rationale Funktionen von $\alpha, \alpha', \ldots$ zu approximieren suchen. Der gemeinsame Nenner dieser Funktionen ist, wenn man den Grad, bis zu dem man in jeder der Größen $\alpha, \alpha', \ldots$ aufsteigen darf, gleich p annimmt, der folgende:

$$F(\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots) = \sum_{h, i, k, \cdots = 0, 1, \cdots p} (-1)^{h+i+k+\cdots} \binom{p}{h}\binom{p}{i}\binom{p}{k}\cdots \frac{[(n+1)p-h-i-k-\cdots-1]}{(p-1)!} \alpha^h \alpha'^i \alpha''^k \cdots.$$

Betrachten wir zunächst diese Funktion und nehmen an, daß p eine Primzahl ist, so werden offenbar alle Glieder dieser in $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ symmetrischen Funktion durch p teilbar bis auf das letzte, welches gleich:

$$(-1)^{np}(\alpha\alpha'\alpha''\cdots)^p \equiv f(0)^p \equiv f(0) \pmod{p},$$

wird.

Um die zugehörigen Zähler zu finden, entwickeln wir das Produkt

$$e^{\alpha} F(\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots)$$

nach Potenzen von $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ Berücksichtigen wir zunächst diejenigen Glieder, deren Ordnung geringer als np ist, so ergibt sich wegen der oben S. 228 abgeleiteten Binomialformel I:

$$\binom{q}{h} - \binom{p}{1}\binom{q-1}{h-1} + \binom{p}{2}\binom{q-2}{h-2} - \cdots = \binom{q-p}{h}$$

für ihre Summe:

$$\sum_{\substack{i, k, \cdots = 0, 1, \cdots p \\ h+i+k+\cdots < np}} (-1)^{i+k+\cdots} \binom{p}{i}\binom{p}{k}\cdots\binom{np-i-\cdots-1}{h} \frac{[(n+1)p-h-i-\cdots-1]}{(p-1)!} \alpha^h\alpha'^i\alpha''^k\cdots = G(\alpha; \alpha', \alpha''\cdots).$$

Die Koeffizienten von G sind wegen:

$$(n+1)p - h - i - k - \cdots - 1 > p$$

sämtlich durch p teilbar.

Die Glieder, für deren Ordnung

$$np \leqq h + i + k + \cdots < (n+1)p$$

ist, erhalten zufolge der Binomialformel II auf S. 229 verschwindende Koeffizienten.

Die noch übrigen Glieder, deren Ordnung

$$h + i + k + \cdots \geqq (n+1)p$$

ist, erhalten gebrochene Koeffizienten. Die Summe dieser Glieder bekommt durch Anwendung der Binomialformel III auf S. 229:

$$\frac{1}{h(h-1)\cdots(q+1)} - \frac{\binom{p}{1}}{(h-1)(h-2)\cdots(q)} + \frac{\binom{p}{2}}{(h-2)(h-3)\cdots(q-1)} - \cdots$$
$$= (-1)^p \frac{(h-q)(h-q+1)\cdots(h-q+p-1)}{h(h-1)\cdots(q-p+1)}$$

die Form:

$$R(\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots) =$$
$$(-1)^p \sum_{\substack{i,k,\cdots=0,1,\cdots p \\ h+i+k+\cdots \geqq (n+1)p}} (-1)^{i+k+\cdots} \binom{p}{i}\binom{p}{k} \cdots \frac{[h+i+\cdots-(n+1)(p+1)]\cdots[h+i+\cdots-np]}{h(h-1)\cdots(np-i-k-\cdots)\cdot(p-1)!} \alpha^h \alpha'^i \alpha''^k \cdots$$

Es ist leicht zu zeigen, daß bei wachsendem p die Größe R beliebig klein wird. Ist nämlich μ der größte der Werte $|\alpha|$, $|\alpha'|$, $|\alpha''|$, ..., so wird zunächst:

$$|R| < \sum_{\substack{i,k,\cdots=0,\cdots,p \\ \sigma=0,1,2,\cdots,\infty}} \frac{\binom{p}{i}\binom{p}{k}\cdots(\sigma+1)\cdots(\sigma+p)}{[(n+1)p+\sigma-i-k-\cdots]\cdots[np-i-k-\cdots](p-1)!} \mu^{(n+1)p+\sigma},$$

wo vermittels:

$$h + i + k + \cdots = (n+1)p + \sigma$$

statt h der neue Summationsbuchstabe σ eingeführt ist. Durch Zusammenfassung derjenigen Glieder, in denen:

$$i + k + \cdots = \tau$$

ist, erhält man:

$$|R| < \sum_{\substack{\tau=0,1,\cdots,(n-1)p \\ \sigma=0,1,2,\cdots\infty}} \frac{(\sigma+1)(\sigma+2)\cdots(\sigma+p)\binom{(n-1)p}{\tau}}{((n+1)p+\sigma-\tau)\cdots(np-\tau)\cdot(p-1)!} \mu^{(n+1)p+\sigma}.$$

Diese Ungleichung muß um so mehr stattfinden, wenn man darin:

$$\binom{(n-1)p}{\tau} \text{ durch } \sum_{\tau=0,1,\cdots,(n-1)p} \binom{(n-1)p}{\tau} = 2^{(n-1)p}$$

ersetzt. Vergrößert man ferner die rechte Seite, indem man durchgehends $\tau = (n-1)p$, und dann Eins für

$$\frac{(\sigma+p)(\sigma+p-1)\cdots(\sigma+1)}{(\sigma+2p)(\sigma+2p-1)\cdots(\sigma+p+1)}$$

setzt, so ergibt sich:

$$|R| < [(n-1)p+1] \sum_{\sigma=0,1,2,\cdots}^{\infty} \frac{(2^{n-1}\mu^{n+1})^p \mu^\sigma}{(\sigma+p)!}.$$

Ersetzt man noch $(p+\sigma)!$ durch $\sigma!\, p!$, so erhält man:

$$|R| < \frac{[(n-1)p+1]}{p} \frac{(2^{n-1}\mu^{n+1})^p}{(p-1)!} e^\mu,$$

oder schließlich:

$$|R| < \varkappa \frac{K^{p-1}}{(p-1)!},$$

wo $\varkappa$ und K feste positive Größen sind.

Multiplizieren wir nunmehr die vorgelegte Gleichung:

$$\sum e^{\alpha} - \sum e^{\beta} = c$$

mit $F(\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots, \beta, \beta', \beta'', \ldots)$ und betrachten die entstehende Gleichung als Kongruenz für die Primzahl p als Modul, so bekommt man rechts die für eine hinreichend große Primzahl p nicht verschwindende ganze Zahl $c \cdot f(0) \cdot g(0)$, und links wird die Summe der Funktionen G eine symmetrische Funktion sowohl der $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ als auch der $\beta, \beta', \beta'', \ldots$, also eine durch p teilbare ganze rationale Zahl. Die verbleibenden Reste sind zusammengenommen absolut kleiner als:

$$\frac{\lambda \cdot \Lambda^{p-1}}{(p-1)!},$$

wo λ und Λ bestimmte positive Größen sind. Die Reste werden also für hinreichend große Werte p sicher gleich einem echten Bruch sein, womit die Unmöglichkeit der Lindemannschen Gleichung I und damit insbesondere die Transzendenz von e und π oder die Unmöglichkeit der Quadratur konstruierbarer Kreis- und Hyperbelsektoren durch algebraische Konstruktionsmittel bewiesen ist.

Schlußwort.

Damit hat nun auch das letzte große Problem der Alten seine Erledigung, wenn auch in negativem Sinne, und damit unser System der *Konstruktionen* und *Approximationen* seinen natürlichen Abschluß gefunden. Denn vergegenwärtigen wir uns die doppelte Wurzel dieser Erkenntnis: die eine ist die Einsicht in das algebraische Wesen der *Konstruktionen,* die andere die algebraische *Approximation* der elementaren Transzendenten. Das Resultat hätte in Hinblick auf die Einfachheit der zu seiner Erreichung erforderlichen Mittel schon vor anderthalb Jahrhunderten gefunden werden können, wenn man dem Grundsatz gefolgt wäre: einfache Probleme *können* durch einfache Mittel erledigt werden.

Aphabetisches Namen- und Sachregister.

Nachträge und Berichtigungen.

S. 5 unten lies SA statt $2SA$.

S. 10 Z. 24 lies (2) statt (1).

S. 16 Z. 19 v. u. lies μy_Q statt y_Q.

S. 20 Z. 24 lies $2bb'$ statt bb'.

S. 20 Aufg. 10, S. 29 Aufg., S. 41 Aufg.: Überhaupt sind alle diejenigen Bestimmungen eines Kegelschnitts aus fünf Punkten oder Tangenten zu behandeln, bei denen von den gegebenen Elementen mehrere koinzidieren, d. h. z. B., daß der Kegelschnitt eine durch hinreichend viele Elemente gegebene Kurve in einem gegebenen Punkte zwei-, drei-, vier-, fünfpunktig berühren soll; u. dgl.

S. 21 Aufg. 17: Allgemeiner, ist eine Kurve durch eine Gleichung

$$f_1(r_1, r_2, \ldots) dr_1 + f_2(r_1, r_2, \ldots) dr_2 = 0$$

zwischen den Abständen r_1, r_2 jedes ihrer Punkte von gegebenen Punkten (oder Kurven) bestimmt, so sind dr_1, dr_2 die Projektionen des Linienelements ds auf die Radien r_1, r_2; daraus ergibt sich die von Roberval 1636 gefundene, 1640 Fermat mitgeteilte, von Duhamel (Sav. étr. V) berichtigte Tangentenkonstruktion. Ferner fällt die Resultante von Kräften f_1 auf r_1, f_2 auf r_2 in die Normale (Poinsot, J. de l'école polyt. VI). Entsprechende Sätze gelten im Raume. Für die Konchoide ergibt sich eine Tangentenkonstruktion aus dem Satze: Die Normalen in zwei entsprechenden Punkten A und A' der Leitlinie und der Konchoide gehen durch einen Punkt P, so daß $POA = 1R$, wenn O der Pol ist. (Königs, Cinématique (Paris 1897), p. 92.)

S. 28 Z. 13 lies PO statt PQ.

S. 37 Z. 13 lies PU statt TU.

S. 38 Z. 5 v. u. lies (rechte) statt rechte.

S. 40 Z. 2 lies $\frac{a}{v}$ statt $\frac{u}{u}$.

S. 44 Z. 3 lies 5 statt 4.

S. 47 Z. 19 lies $S(p'q'r'x')$ statt $S(pqrx)$.

S. 48 Figur lies I statt J.

S. 49 Z. 13. Dual entsprechend sind Bögen projektiv gleicher Totalkrümmung zu erklären.

S. 54 Z. 2 lies B' statt B.

S. 62 Z. 11 lies $\sqrt{-3}$ statt $\sqrt{3}$.

S. 63 Z. 26 lies h statt k.

S. 64 Z. 8 lies x^3 statt x^2.

S. 69 Z. 6 lies B statt C.

S. 71 Z. 25 lies B^2a^2 statt B^2a.

S. 87 Z. 7. Ersetzt man die Trisektionshyperbel durch ihren Krümmungskreis im Scheitel, vom Radius AB, so erhält man eine sehr brauchbare Näherungsdreiteilung.

S. 88 Z. 23
S. 92 Z. 5
S. 94 Z. 11 v. u.

} lies $1 + \frac{x}{a}$ statt $1 - \frac{x}{a}$ und $1 - \frac{x}{a}$ statt $1 + \frac{x}{a}$.

S. 110 Z. 5 v. u. streiche: Im ... betrachtet.

S. 113[1]). Über früheres Vorkommen krummliniger Koordinaten s. E. Müller, Enz. d. Math. III 1, p. 629.

S. 130 Z. 10. Weitere Aufgaben: Halbierung eines sehr kleinen Kreisbogens. Aufsuchung des Berührpunktes einer Geraden und eines sehr großen Kreisbogens. (Dürer, Underweysung usw.)

S. 135. Ein dem Tchebycheffschen Instrument analoges, ebenso einfaches, aber immer einen *genauen* regulären Polygonzug liefernd, erhält man durch Abänderung der bekannten Nürnberger Schere. Bei dieser liegen die drei Gelenkpunkte jedes Gliedes *äquidistant* und *geradlinig*; diese beiden Beschränkungen hebe man auf, behalte aber die Kongruenz *aller* und die Symmetrie je zweier *zusammenhängender* Glieder bei.

S. 142 Z. 10 v. u. lies VI statt V.

S. 146 Z 8 lies $p^2 - 2p$ statt $p^2 - 3p + 2$.
Z. 10 lies ebenso statt also.

S. 154 Z. 11 v. u. füge ein: eine sehr einfache gab neuerdings Graeffe in den Ber. d. deutsch. Math. Ver. Bd. 19 (1910), p. 320.

S. 165 Z. 4 v. u. lies B statt Q.
Z. 6 v. u. lies AB statt PQ.

S. 166 Z. 12 lies $\cos\alpha \cdot \sqrt{1 - k^2 \sin^2\alpha}$ statt $\sqrt{1 - k^2 \sin^2\alpha}$.

S. 169 Z. 15 v. u. lies VII statt VI.

S. 179 Z. 10 v. u. lies anderer Kontur statt anderer.

S. 184[1]), 309, 313. Das Vorkommen von $\pi = 3^1/_8$ bei Vitruv ist strittig (Staigmüller, Dürer als Mathematiker, Stuttgart 1891, p. 29). Die zweite Ausgabe (1838) von Dürers Underweysung enthält im zweiten Zusatz eine Rektifikation, die auf $\pi = 3^1/_7$ beruht.

S. 188 Z. 5 v. u. lies $\doteq$ statt $\mathrel{\overline{\frown}}$.

S. 190 Z. 2 lies $\mathrel{\overline{\frown}}$ statt $\doteq$.
Z. 7 lies kleiner statt größer und umgekehrt.

S. 192 Z. 7 lies $\frac{\pi}{6}$ statt $\frac{x}{6}$.

S. 196 Z. 13 v. u. lies [2]) (3) statt [2]).

S. 201 Z. 9 v. u. lies $FB - FG$ statt $FG - FB$.

S. 219 [2]). Die richtige Formel lautet:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} F_i(x_i) \left\{ \frac{f(x_i)}{F_i(x_i)} + \left(\frac{f(x_i)}{F_i(x_i)}\right)' \cdot \frac{(x - x_i)}{1!} + \cdots + \left(\frac{f(x_i)}{F_i(x_i)}\right)^{(\nu_i - 1)} \cdot \frac{(x - x_i)^{\nu_i - 1}}{(\nu_i - 1)!} \right\},$$

wenn

$$\prod_{h \neq i} (x - x_h)^{\nu_h} = F_i(x)$$

gesetzt wird.

S. 238 Z. 2 lies $\sum \alpha$ statt $m - 1$.

S. 270 Z. 13 v. u. lies Kriterien statt Reihen.

S. 272 Z. 19 v. u. lies $+ a_{n+4}$ statt $- a_{n+4}$.

S. 281 Z. 1 v. u. lies an statt ab.

S. 286 Z. 10 v. u. (Vahlen, Gött. gel. Anz. 1901, p. 791).

S. 290[3]). Diese Angabe Kästners ist unrichtig, die Approximation oskuliert offenbar bei kleinem Winkel.

S. 310 Z. 2. Der Ptolemäische Wert $\pi = 3^{17}/_{120}$ ist kein Näherungswert des Kettenbruchs.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig